ISNN:2181-1296



SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 5/1 (141)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC JOURNAL**

2023-yil, 5-son (141) **ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI**

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d., professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.d., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

ANIQ FANLAR

SH.A.ALIMOV - O‘zFA akademigi
S.N.LAKAYEV - O‘zFA akademigi (SamDU)
M.M.MIRSAIDOV - O‘zFA akademigi
A.S.SOLEEV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.IKROMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
B.X.XO‘JAYAROV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.G.YAGOLA - f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I.I.JUMANOV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
X.X.XUDOYNAZAROV - t.f.d., professor (SamDU)
ALBERTO DEL BIMBO - Florensiya universiteti professori, Italiya
L.SABIROV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
A.JUMABOYEV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
N.N.NIZAMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
O.Q.QUVONDIQOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.RAXMATULLAYEV - f.-m.f .d., professor
A.SH.YARMUXAMEDOV - f.-m.f.n., (SamDU)
X.S.XAYDAROV - f.-m.f.n., dotsent (SamDU)

TABIY FANLAR

M.X.ASHUROV - O‘zFA akademigi
N.B. FERAPONTOV - k.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
SH. M. TUGIZOV - professor, Koliforniya universiteti, AQSh
H. I. AKBAROV - k.f.d., professor (O'zMU)
E. A. ABDURAXMONOV - k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV - k.f.d., professor (SamDU)
L. A. BULAVIN - Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
X. Q. XAYDAROV - b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV - b.f.d., professor (SamDU)
Sh. T. XOLIQULOV - g.f.d., professor (SamDU)
S. B. ABBASOV - g.f.d., professor (SamDU)
Q. S. YARASHEV - g.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK - Seul univeriteti professori, Koreya
D.B.XURSANOV - g.f.f.d., dotsent (SamDU)
M. S. QUZIYEV - b.f.f.d., dotsent (SamDU)

Obuna indeksi – yakka tartibdagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

Икромов И.А, Баракаев А.М. *Об ограниченности максимальных операторов для выпуклых функций, не имеющих конечный линейный тип*…….....	3-10
Safarov A.N., Muzafarov A.M., To‘xtayev U.O‘., Tog‘ayev B.S., Salimov Sh.G‘., Esanov I.T. *Tabiiy suvlar tarkibidagi radionuklidlar miqdorini radiokimyoviy radiometriya usullari yordamida aniqlash metodikasi*……..	11-20
Ruziyev J.E., Abduraxmanov I.E., Suvonqulov Sh.B. *Analitik obyektlardagi bariy ionlarini ionometrik aniqlash*……..	21-25
O‘rozov S., Aslanov Q., Qo‘ldoshev O. *Oltingugurt qoplamali fosforli o‘g‘itlar olish*……..	26-30
Mamatov Sh., Omonov Sh. *Differensial tenglamalar misolida fanlararo bog‘lanish*……..	31-35
Ахмеджанов Ф.Р., Тугалов Ф.Б., Курбанов Ж.О. *$NaCl_xBr_{1-x}$ кристалларининг акустик хоссалари*……	36-40
Inxonova A., Eshtursunov D., Botirov S., Murtazaqulov M., Bekchanov D. *Oqava suvlarni biologik tozalashda pvc&pei asosida olingan mis polimer komlpleksining qo’llanilishi*……	41-48
Qurbonov P.R. *O‘zbekiston respublikasi urbanistik tarkibi rivojlanishining geografik jihatlari*.....	49-55
Ikromov I.A., Jo‘raqulov A.J. *Regulyarlashtirilgan o‘lchovning bahosi haqida*……	56-63
Байжуманов А.А., Бердимуродов М.А. *Метод решения систем нелинейных булевых уравнений на основе минимизации дизъюнкций сложных конъюнкций*……	64-70
Abdullayev J.U. *Uglevodorodlar asosida spirtlar sintezi*……	71-75
Boyqobilov D.B., Jumag‘ulov Sh.H., Ro‘zimuradov O.N. *Tartiblangan titan dioksid nanotrubkalarining shakllanishi*……	76-80
Ахмеджанов Ф.Р., Мустафаев Т.Ш., Эшниязов О.И., Нуждов Г.С., Авдиевич В.Н. *Лантан трифторид кристалларида ионларнинг харакатига эластик деформациянинг таъсири*……	81-85
Хайдаров И.К. *Моделирование переноса растворенного вещества в неоднородном пороупругом глинистом сланце*……	86-91
Urolov Sh.Z., Shaymardanov Z.Sh., Jalolov R.R., Rustamova B.N., Arziqulov E.U. *Rux oksidi nanostrukturalarining morfologik va kristallografik xossalarining sintez sharoitiga bog‘liqligi*……	92-99
Zufarov A.M., Sagdeyev D.O., Galyametdinov Yu.G., Muxamadiyev N.K. *Turli xil anion stabilizatorlar bilan stabillashgan* CdS *sintezi va uning fotokatalitik xossalari*……	100-108

УДК 517.518.5 **DOI: https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v5.141.1.2292**

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ТИП

[1]И.А.Икромов, [2]А.М. Баракаев
[1]Институт математики им. В.И. Романовского АНРУз
[2]Самаркандский государственный Университет
E-mail: i.ikromov@mathinst.uz, azamat1_9@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена к изучению ограниченности максимальных операторов связанных с выпуклыми гиперповерхностями. Получены необходимые и достаточные условия для широких классов выпуклых функций, имеющих изолированный нуль в начале координат.

Ключевые слова: максимальный оператор, выпуклые функции, норма оператора, конечный тип, преобразование Фурье.

On the boundedness of maximal operators for convex functions that do not have a finite line type

Abstract. The article is devoted to study the boundedness of the maximal operators associated to convex hypersurfaces. Necessary and sufficient conditions are obtained for widely classes of convex functions that have an isolated zero at the origin.

Keywords: maximal operators, convex functions, operator norm, finite type, Fourier transform.

Chekli tipga ega bo'lmagan qavariq funksiyalar bilan bog'langan maksimal oparatorlarning chegaralanganligi

Annotatsiya. Maqola qavariq gipersirtlar bilan bog'langan maksimal operatorlarning chegaralanganligini o'rganishga bag'ishlangan. Koordinata boshida yakkalangan nolga ega bo'lgan qavariq funksiyalarning katta sinfi uchun zaruriy va yetarli shartlar olingan.

Kalit so`zlar: maksimal operator, qavariq funksiyalar, operator normasi, chekli tip, Fur'e almashtirishi.

1. **Введение.** Многие задачи, связанные с понятием предельного перехода в интегралах и суммах, зависящих от параметров, в частности, с дифференцированием интеграла часто приводится к изучению различных вида "максимальных операторов". Одним из таких операторов является классический максимальный оператор Харди-Литтлвуда, который появляется при решении различных задач гармонического анализа и математической физики. В настоящей работе мы будем иметь дело с максимальными операторами, связанными (ассоциированными) с гиперповерхностями. Основным результатом является теорема-1, в которой получена необходимое и достаточное условия ограниченности максимальных операторов в случае, когда гиперповерхность имеет изолированный нуль в начале координат.

2. Постановка задачи и формулировка основной теоремы. Пусть $S-$ гладкая гиперповерхность в R^{n+1} и $d\mu = \psi d\sigma$, где $d\sigma -$ индуцированная мера Лебега на S и $\psi -$ бесконечно-гладкая неотрицательная функция с компактным носителем в R^{n+1} ($\psi \in C_0^\infty$). Через δ_t обозначим обычную евклидову гомотетию, заданную формулой $\widehat{\delta_t h}(\xi) = \hat{h}(t\xi)$(см. [1]).

Рассмотрим следующий оператор усреднения

$$A_t f(x) = \int_S f(x - ty)\psi(y)\, d\sigma(y) = f * \delta_t(\psi d\sigma).$$

Соответствующий максимальный оператор определим соотношением:

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |A_t f(x)|.$$

Определение 1. Говорят, что максимальный оператор M ограничен в L^p, если существует положительное число C_p такое, что для любой функции $f \in C_0^\infty(R^{n+1})$, выполняется неравенство:

$$\|Mf\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p},$$

где $\|\cdot\|_{L^p}$ – естественная норма пространства L^p.

Стейн в своей работе [2] доказал что, если $S = S^n$ является n - мерной сферой, центр которой совпадает с началом координат, то максимальный оператор Mf ограничен в $L^p(R^{n+1})$ при $p > \frac{n+1}{n}, n \ge 2$, т.е. справедлива оценка (2).

Отметим, что при $p \le \frac{n+1}{n}$ максимальный оператор Mf неограничен в L^p. При доказательстве ограниченности сферических максимальных операторов существенно используется тот факт, что гауссова кривизна сферы отлична от нуля. Задача об ограниченности максимальных операторов в L^p, связанных с гиперповерхностями, для которых гауссова кривизна обращается в нуль в некоторых точках является актуальной.

В работе [1] доказано что, если S выпуклая гиперповерхность конечного линейного типа(см. определение 3) и $p \ge 2$, то условие

$$d(x,T)^{-\frac{1}{p}} \in L^1_{loc}(S)$$

является необходимым и достаточным для ограниченности максимального оператора в $L^p(R^{n+1})$, где T – любая гиперплоскость, не проходящая через начало координат и $d(X,T)$ – расстояние от $x \in S$ до T. В работе [3] доказано, что если $S \subset R^3$ – гладкая гиперповерхность, то при $p > h \ge 2$ (где $h(S)$ – высота гиперповерхности, введенная в классической работе А.Н. Варченко [4]), максимальный оператор ограничен.

Если S – аналитическая гиперповерхность, то при $p \le h$ максимальный оператор не ограничен [3]. Однако при $p = h$ вопрос об ограниченности максимального оператора оставался открытым для бесконечно гладких гиперповерхностей.

В данной работе мы предположим, что в каждой точке хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля. Из результатов С.Д. Согги [5] следует, что такой максимальный оператор ограничен в L^p при $p > 2$. Однако, вопрос об ограниченности максимального оператора при $p = 2$ остается открытым.

Пусть нам даны поверхность $S = \{x, y, z(x,y)\} \subset R^3$ и её касательная плоскость T в точке $(0,0,z(0,0))$. Обозначим через $d(Y,T)$ расстояние от точки $Y := (x,y,z(x,y))$ поверхности до ее касательной плоскости T. Более того, пусть в некоторой окрестности начала координат выпуклая поверхность S задана следующей формулой:

$$z = F(x,y) := xb(x,y) + \varphi(y) + C,$$

где $b(x,y)$ – аналитическая функция с условием $b(0,0) = 0, b'_x(0,0) \ne 0$, C – любая константа отличная от нулья и $\varphi(y)$ есть выпуклая функция, и производные всех порядков обращаются в нуль в точке 0, то есть $\varphi^{(n)}(0) = 0$ для всех неотрицательных целых чисел n.

Далее, пусть максимальный оператор определен как в (1), где $supp\psi \subset U \subset S$ и T её касательная плоскость в точке $(0,0,Z(0,0))$. Обозначим через $d(Y,H)$ расстояние от точки $Y := (x,y,z(x,y))$ поверхности до ее касательной плоскости T. Полученные результаты мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема-1. Если функция φ выпуклая и при любом y, отличном от нуля, положительна; то есть $\varphi(y) > 0$ при $y \ne 0$ и если, кроме этого $\varphi^{(j)}(0) = 0, \forall j \ge 0$ и $\psi(0,0) > 0$, то для того

что бы максимальный оператор M был ограниченным в пространстве $L^2(R^3)$ необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} ln\varphi(y)dy < +\infty.$$

3.Необходимые сведения. Определение-2. Функция $F(x)$ называется выпуклой, если для любых векторов $x, y \in U \subset R^n$ (где $U -$ некоторая выпуклая окрестность начала координат) и для любых неотрицательных чиселα, β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta = 1$, имеет место неравенство:

$$F(\alpha x + \beta y) \leq \alpha F(x) + \beta F(y).$$

Определение-3. Функция F называется функцией конечного линейного типа по направлению единичного вектора $\xi \in R^n$ в начале координат, если существует $N \geq 2$ такое, что$D_\xi^N F(0) \neq 0$, где $D_\xi^N F -$ производная функции F по направлению вектора ξ в начале координат. Если F имеет конечный линейный тип для каждого единичного $\xi \in R^n$, то говорят, что гиперповерхность $S = \{x, F(x)\}$ имеет конечный линейный тип в точке $(0, F(0))$.

Приведем следующее предложение, доказательство, которого следует из аналога теоремы Г.Щульца [6] (а также см.[7]})

Предложение-1. Допустим что $rankHess\, F(0,0) = 1$. Тогда, после замены подходящих линейных координат, функцию F в достаточно малой окрестности начала координат можно записать в следующем виде:

$F(x,y) = b(x,y)\big(y - \omega(x)\big)^2 + \varphi(x),$

где b, ω и $\varphi -$ гладкие функции, и $\omega(x) = cx^m + O(x^{m+1})$, где $c \neq 0$ и $m \geq 2$, причем $b(0,0) \neq 0$.

Предложение-2. Если дважды дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ в окрестности нуля выпукла и $\nabla f(0,0) = 0$, то точка $(0,0)$ является точкой минимума.

Доказательство: Сначала докажем для функции, зависящей от одного переменного, т.е. если $z = f(x) -$ выпуклая и удовлетворяет условию $f'(0) = 0$, то точка $x = 0$ единственная точка минимума. Пусть $x > 0$. Согласно определения выпуклости имеем:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{0}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(0).$$

После простых преобразованиях последнею неравенству можно записать в следующем:

$$\frac{f(x)}{2} - \frac{f(0)}{2} \geq f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0).$$

Разделив оба части на $\frac{x}{2}$, получим следующее неравенство:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)}{\frac{x}{2}}.$$

Применяя эту неравенству n раз имеем следующую:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n}}.$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ и учитывая что $\frac{x}{2^n} \to 0$, получим

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq f'(0) = 0.$$

Из этого неравенства следует что $f(x) \geq f(0)$ при $x > 0$. Точно также для $x < 0$ можно доказать, что $f(x) \geq f(0)$. Таким образом, для всех $x \neq 0$ доказали что $f(x) \geq f(0)$. Теперь при фиксированных $x, y \neq 0$ рассмотрим функцию $P(t) = f(tx, ty)$ от одной переменной t. Продифференцировав дважды функцию $P(t)$ имеем следующее равенство:

$$P''(t) = \frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial y^2} y^2.$$

Так как функция $z = f(x, y)$ выпуклая то $Hessz = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0$. Для $P''(t)$ имеет место следующее равенство:

$$P''(t) = y^2 \left(\frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial x^2} q^2 + 2\frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial x \partial y} q + \frac{\partial^2 f(tx,ty)}{\partial y^2} \right),$$

где $q = \frac{x}{y}$. Квадратный трехчлен стоящий в последней скобки неотрицательная, поскольку дискриминант $D = 4\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -4Hessz \leq 0$, и старший коэффициент $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$.

Это в свое очередь означает, что функция $P(t)$ также является выпуклой.

Так как, $P'(0) = 0$ по доказанному имеем $P(1) \geq P(0)$ или все равно что $f(x, y) \geq f(0,0)$.

Исходя из теорему Щулца [6] можно доказать следующую:

Предложение 3. Выпуклая функция заданной формулой (4) можеть быть записано в виде

$z = x^2 B(x, y) + \varphi(y) + C$

где $B(0,0) > 0$.

Лемма 1. Интегрируемость функции $ln\varphi(y)$ на отрезке $[0,1]$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-1}(2^{-n})$.

Доказательство леммы 1 дано в работе [8].

Теперь сформулируем следующую теорему, принадлежащую А. Иосевичу и Е. Сойеру [1] (а также см. [9]), которые содержат важные методы доказательства ограниченности максимальных операторов.

Теорема 2. Пусть $\tau -$ распределение с носителем в шаре B, радиус которого равен C_1 и $|\hat{\tau}(\xi)| \leq C_1, \max\{|x| : x \in supp\tau\} \leq C_2$. Более того, предположим

$$\left(\int_1^2 |\hat{\tau}(\xi)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 (1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}} \gamma(\xi),$$

$$\left(\int_1^2 |\nabla \hat{\tau}(\xi)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 (1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}} \gamma(\xi)$$

где $\hat{\tau}_t(\xi) = \hat{\tau}(t\xi)$ и $\gamma -$ некоторая ограниченная невозрастающая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию: $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(2^n) < \infty$. Для $t > 0$ определим,

$M_\tau f(x) = \sup_{t>0} |f * \tau_t(x)|$.

Тогда $\|Mf\|_{L^2} \leq C\sqrt{C_1 C_2} \|f\|_{L^2}$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство необходимости условии приведено в работе [8]. Докажем достаточность теоремы. Известно, что распределение $\hat{\tau}(\xi)$ можеть быт написан в виде, следующем двойном интеграле:

$$\hat{\tau}(\xi) = \iint_{R^2} e^{i(\xi_3 z(x,y)+\xi_1 x+\xi_2 y)}\varphi(x,y,z(x,y))\sqrt{1+|\nabla z(x,y)|^2}dxdy,$$

где $z(x,y)-$ выпуклая функция и заданной формулой (4). Мы можем считать, что $\xi_3 \neq 0$ поскольку $\hat{\tau}(\xi)-$ преобразование Фурье для гладкой функции с компактном носителем и таким образом $\hat{\tau}(\xi) = O(|\xi|^{-N})$, где N достаточно большое число. Число N можно выбрать сколь угодно большим. Рассмотрим следующую фазовую функцию
$\Phi(x,y,s) = z(x,y) + s_1 x + s_2 y,$

где $s_j = \frac{\xi_j}{\xi_3}, j = 1,2$. Если $|s| := |s_1| + |s_2| > 1$ тогда существует положительное число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $(x,y) \in supp\varphi(\cdot, z(\cdot))$ выполняется неравенство
$0 < \delta|s| \leq \nabla\Phi(x,y,s)$. Используя формулу интегрирования по частям N раз, имеем $\hat{\tau}(\xi) = O(|\xi|^{-N})$. Это городза лучшая оценка чем мы хотим. Поэтому рассмотрим случай $\max\{|s_1|,|s_2|\} \leq 1$ и запишем (6) следующим образом:

$$J(\lambda,s) := \iint_{R^2} e^{i\lambda\Phi(x,y,s)}a(x,y)dxdy,$$

где $a(x,y) = \varphi(x,y,z(x,y))\sqrt{1+|\nabla z(x,y)|^2}$ является амплитудной функцией. Далее исследуем поведение осциляторного интеграла (7).
Поэтому сначала рассмотрим следующий одномерный осциляторный интеграл:

$$J(\lambda,y,s_1) := \int e^{i\lambda(xb(x,y)+\varphi(y)-s_1 x)}a(x,y)dx.$$

Применим метод стационарный фазы к последнему интегралу (8). Для этой цели найдем критическую точку, определяющую из уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xb(x,y) + \varphi(y) - s_1 x)' = 0.$$

Так как, $\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x^2} = 2b'_x(0,0) \neq 0$ то по теореме о неявных функциях уравнение (9) имеет гладкое решение $x = x(y,s_1), x(0,0) = 0.$

Лемма 1. Если $z = F(x,y)$ выпуклая функция тогда и функция $f(y) = F(x(y),y)$ также выпукла, где $x(y)-$ решение уравнения $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, причем

$$f''(y) = \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \cdot HessF(x,y).$$

Доказательство: По условии леммы имеем

$$\frac{\partial F(x(y),y)}{\partial x} = 0.$$

Продифференцировав по y последнего равенство получим;

$$\frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x(y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial x \partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial x(y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial x^2}}.$$

Определим функцию $f(y) = F(x(y), y)$. Продифференцировав дважды по y получим следующие равенство;

$$f''(y) = \frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x(y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 F(x(y),y)}{\partial y^2}.$$

Поставляя вместо $\frac{\partial x(y)}{\partial y}$ равенство (10) получим следующую равенству:

$$f''(y) = \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \cdot HessF(x(y), y) \geq 0,$$

что и требовалась доказать.

Применяя метод стационарной фазы к последнему интегралу $J(\lambda, y, s_1)$, имеем

$$J(\lambda, y, s_1) = C \frac{e^{i\lambda(\psi(y,s_1)+\varphi(y))+isign(\lambda)\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\lambda}} a(x(y, s_1), y) + R(\lambda, y, s_2),$$

где

$$\psi(y, s_1) = x(y, s_1) b(x(y, s_1), y) - s_1 x(y, s_1)$$

и $R(\lambda, y, s_2)$ – является остаточным членом, удовлетворяющим условию

$$|R(\lambda, y, s_2)| \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно, наш двумерный осциляторный интеграл (7) может быть записан как

$$J(\lambda, s) := \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int e^{i\lambda(\psi(y,s_1)+\varphi(y)-s_2 y)} a_1(y, s_1) dy + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right),$$

где $a_1(y, s_1) = Ca((y, s_1), y)$.

Сформулируем следующую теорему Лоясевича доказательство которого можно увидеть в работе [10].

Теорема-3. Пусть $\Omega -$ открытое множество в R^n, и пусть $f -$ действительная аналитическая функция в Ω. Пусть $E = \{x \in \Omega: f(x) = 0\}$. Тогда для всякого компактного множества $K \subset \Omega$ существует такие константы C и N, что для всех $x \in K$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \geq C\big(d(x, E)\big)^N.$$

Лемма-2. Функция $\psi(y, s_1)$ также выпуклая, т.е. для любого фиксированного s_1 при $y \in (-\delta, +\delta)$ справедливо $\psi''(y, s_1) \geq 0$.

Доказательство: Из леммы 1 следует что, функция $\psi(y, s_1) + \varphi(y)$ выпуклая, т.е.

$$\psi''(y, s_1) + \varphi''(y) \geq 0.$$

По подготовительным теоремы Вейерштрасса для функции $\psi''(y, s_1)$ имеем, разложение

$$\psi''(y, s_1) = \big(y^m + c_1(s_1) y^{m-1} + \cdots + c_m(s_1)\big) \gamma(y, s_1) s_1^n,$$

где функции $c_k(s_1)$ и $\gamma(y,s_1)$ голоморфны и функция $\gamma(y,s_1)$ не имеет нулей в некоторой окресности точки $(0,0)$. Пусть $r_j(s_1)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{kj}s_1^{r_k}$ корни многочлена

$$\left(y^m+c_1(s_1)y^{m-1}+\cdots+c_m(s_1)\right)\gamma(y,s_1)s_1^n,$$

тогда, имеем

$$\psi''(y,s_1)=y^k s_1^n\,\gamma(y,s_1)\prod_{j=1}^{N}\left(y-r_j(s_1)\right).$$

Пусть среди корней $r_j(s_1)$ имеется космплексначные $r^*{}_i(s_1)$. Тогда сопряженный к нему число $\bar{r}^*{}_i(s_1)$ также будеть корнем, ибо $\psi''(y,s_1)-$ вещественна аналитическая функция. Таким образом для $\psi''(y,s_1)$ верно следующее равенство:

$$\psi''(y,s_1)=y^k s_1^n\,\gamma(y,s_1)\prod_{i=1}^{N_1}\left(y^2+p_i(s_1)y+q_i(s_1)\right)\prod_{j=1}^{N_2}\left(y-r_j(s_1)\right),$$

где квадратные трехчлены входящие в произведение положительно определены и $r_j(s_1)-$ действительные корни. Более того, согласно по работе [3], эти корни $r_j(s_1)$ могут быть выражены в малый окрестности точки 0, как ряд Пюизе;

$$r_j(s_1)=c_{l_1}^{\alpha_1}s_1^{a_{l_1}}+c_{l_1l_2}^{\alpha_1\alpha_2}s_1^{a^{\alpha_1}{}_{l_1l_2}}+\cdots+c_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}s_1^{a_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}+\cdots,$$

$$c_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}\beta\neq c_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}\gamma \text{ для } \beta\neq\gamma$$

и

$$a_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}>a_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}},$$

со строго положительными показателями $a_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}>0$ и ненулевыми комплексными коэффициентами $c_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Эти корни можно сгруппировать в кластеры: Кластерь

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_p\\ l_1 & \ldots & l_p\end{bmatrix}$$

обозначает все корни $r_j(s_1)$ с учетом их кратностей,которые удовлетворяют

$$r_j(s_1)-\left(c_{l_1}^{\alpha_1}s_1^{a_{l_1}}+\cdots\right)=O\left(s_1^b\right)$$

для некоторого показателя $b>a_{l_1\ldots l_p}^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}$.

Учитывая все это можно предположить, что для достаточно малых s_1 выполняется:
$r_{j+1}(s_1)\geq r_j(s_1)$.

Заметим что линие $y=r_j(s_1)$ разбивает окрестность U точки $(0,0)$ на непересекающие части

U_j, где

$$U_j=\{(y,s_1):r_j(s_1)<y<r_{j+1}(s_1)\}.$$

Докажем что для любого $(y,s_1)\in U\ \psi''(y,s_1)\geq 0$. Доказательству проведем от противного. Пусть для некоторого $l(s_1)=b_1^j s_1+b_2^j s_1{}^2+\cdots+b_n^j s_1{}^n+\cdots$, где $r_j(s_1)<l(s_1)<r_{j+1}(s_1)$ выполняется:

$$\psi''(l(s_1),s_1)\leq 0.$$

Тогда по неравенству (13) существуют такие константы C и N что выполняется следующая неравенства:

$$|\psi''(l(s_1),s_1)|\geq C\left(d(l(s_1),s_1),r_j(s_1)\right)^N\approx C|s_1|^L,$$

или по предположение

$$\psi''(l(s_1),s_1)\leq -C|s_1|^L.$$

Но так как функция φ плоская то

$\varphi''\left(l(s_1)\right) \leq C|s_1|^{10L}$.

Складывая последние два неравенства получим, что

$$\psi''(l(s_1),s_1) + \varphi''\left(l(s_1)\right) \leq -\frac{C}{2}|s_1|^L.$$

Но последнее неравенство противоречит к неравенству (13).

Проинтегрировав дважды неравенству в леммы 2 получим следующую неравенству:

$\psi(y,s_1) - \psi(0,s_1) - \psi_y(0,s_1)y \geq 0$.

Рассмотрим выпуклую функцию $\Phi(y,s_1) = \psi(y,s_1) - \psi(0,s_1) - \psi_y(0,s_1)y + \varphi(y)$. После простых преобразования интеграл (12) может быть записано ввиде

$$J(\lambda,s_1) := e^{i\lambda\psi(0,s_1)}\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\int e^{i\lambda\left(\Phi(y,s_1)-(s_2-\psi_y(0,s_1)y\right)}a_1(y,s_1)dy + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right),$$

Применим результаты Nagel, A., Seeger A. и Wainger S. [11] к последному интегралу, получим

$$|\hat{\tau}(\xi)| \leq C\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda},s_2\right)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Но так как $\Phi(y,s_1) \geq \varphi(y)$ то последная оценка может быть записана в следующем:

$$|\hat{\tau}(\xi)| \leq C\frac{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Наконец, применяя теорему 2 и учитывая лемму 1 получим доказательству теоремы 1.

Литература

1. Iosevich A., Sawyer E. Maximal Averages over surfaces, Adv. in Math., -1997.-132.-46.-P.119-187.
2. Stein E.M. Maximal functions.I.Spherical means, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A.-1976.-73. 7.-P.2174-2175.
3. Ikromov I. A., Kempe M., M¨uller D. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in R3 and related problems of harmonic analysis, Acta Math., -2010. -204. -P. 151–271.
4. Варченко А.Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. Функциональный анализ и его прил.,-1976.10, No3.-Стр.13-38.
5. Sogge C.D, Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature, in Fourier Analysis and Partial Differential Equations (Miraflores de la Sierra, 1992), Stud. Adv. Math, pp. 317–323. CRC, Boca Raton, FL, -1995.
6. Schulz H. Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms//Indiana Univ. Math. J. -1999. -40.-No4.-P.1267-1275.
7. Ikromov I.A, Muller D. Fourier Restriction for Hypersurfaces in Three Dimensions and Newton Polyhedra (AM-194)//Princeton University Press.-2016.
8. I. A. Ikromov, A. M. Barakayev, On boundedness of maximal operators. Priprint Известия вузов. (Russian).
9. Sogge C.D, Stein E.M. Averages of functions over hypersurfaces in R^n Invent. Math.,-1985.-82.-3. P.543-556.
10. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. Мир.-1968.
11. Joaquim Bruna, Alexander Nagel and Stephen Wainger. Convex Hypersurfaces and Fourier Transforms // Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 127, No. 2 (Mar., 1988), pp. 333-365.