ISNN:2181-1296



SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 3/2 (139)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2023-yil, 3-son (2-seriya)(139) ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d., professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.d., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

ANIQ FANLAR

SH.A.ALIMOV - O‘zFA akademigi
S.N.LAKAYEV - O‘zFA akademigi (SamDU)
M.M.MIRSAIDOV - O‘zFA akademigi
A.S.SOLEEV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.IKROMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
B.X.XO‘JAYAROV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.G.YAGOLA - f.-m.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I.I.JUMANOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
X.X.XUDOYNAZAROV - t.f.d., professor (SamDU)
ALBERTO DEL BIMBO - Florensiya universiteti professori, Italiya
L.SABIROV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.JUMABOYEV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
N.N.NIZAMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
O.Q.QUVONDIQOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.RAXMATULLAYEV - f.-m.f.d., professor
A.SH.YARMUXAMEDOV - f.-m.f.n., (SamDU)
X.S.XAYDAROV - f.-m.f.n., dotsent (SamDU)

TABIY FANLAR

M.X.ASHUROV - O‘zFA akademigi
N.B. FERAPONTOV - k.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
SH. M. TUGIZOV - professor, Koliforniya universiteti, AQSh
H. I. AKBAROV - k.f.d., professor (O'zMU)
E. A. ABDURAXMONOV - k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV - k.f.d., professor (SamDU)
L. A. BULAVIN - Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
X. Q. XAYDAROV - b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV - b.f.d., professor (SamDU)
Sh. T. XOLIQULOV - g.f.d., professor (SamDU)
S. B. ABBASOV - g.f.d., professor (SamDU)
Q. S. YARASHEV - g.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK - Seul univeriteti professori, Koreya
D.B.XURSANOV - g.f.f.d., dotsent (SamDU)
M. S. QUZIYEV - b.f.f.d., dotsent (SamDU)

Obuna indeksi – yakka tartibdagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA	
Кулжанов У.Н., Адилов А.А. *Спектралные свойства одночастичного оператора шредингера с контактным потенциалом*……..	3-7
Eshbekov R. *The cauchy problem for the modified korteweg-de vries equation with finite density in the class of periodic functions*……..	8-16
Abdurakhmonov B., Zaripov O., Teshayeva M. *Lagranj ko`paytuvchilari yordamida tengsizliklarni isbotlash*……	17-21
Umirzoqova I., Boboxonova G. *Oshkormas funksiya egriligi va kvadratik formalari*……..	22-26
Qurbonov H.G‘., Rustamov M.K., Gafurova D.A., Temiron N.N., Toshpulatova M.Sh. *Synthesis and properties of difficult combustion material based on modified polyacrylonitrile*……	27-32
Холиков Д.Ш., Худайбердиев З.Б., Исмоилов Х.Ф. *Упрощение нелинейного уравнения крутильных колебаний круглого конического слоя*……	33-38
Kamoliddinov D.U. *Density and regular distribution*……	39-43
Kuliev K., Eshimova M., Turaqulov T. *A new method for norm of a hardy-volterra operator*……	44-50
Kuziev B.N. *A comparative study on feature selection methods in QSAR*……..	51-55
Мардонов Ж.А. *Задача коши для неоднородного лапласова поля*……	56-61
Нуритдинов И., У.Эсанов З., Саидахмедов К.Х., Мажидов Х.М. *Преобразовании Dy1 центров в Dy2 центры в кристаллах* Dy_2SiO_5……	62-66
Akhmadova M.O. *The number of eigenvalues of the discrete schrödinger operator*……	67-71
Курбаниязов А.А., Сырлыбекқызы С., Раманкулов Ш. Ж., Аймбетова И.О., Ещанова Т.Д. *Новые данные высокого временного разрешения о морских и их изменчивости в зависимости от климатических условий*……	72-77
Ikromov I.A., Safarov A.R., Khudoyberdiev D. *Invariant estimates for generalized oscillatory integrals with polynomial phase*……	78-86
Urazbayev A.K. *Amudaryo hozirgi deltasidagi yer usti suv oqimlarining geografik strukturalari*……	87-91
Komilova N.K., Karshibayeva L.K. *Iqlim o‘zgarishlari va aholi kasalliklarining hududiy tarkibi (Jizzax va Sirdaryo viloyatlari misolida)*……	92-99
Нуритдинов И., Эсанов З.У., Саидахмедов К.Х., Ирисов Ш. *Влияние ионизирующего излучения на спектрально-люминесцентные свойства органических сцинтилляторов ups-923a*……	100-104
Alimkulov N.R. *Antropogen landshaftlarni tadqiq etish asosida landshaft-ekologik sharoit tushunchasining shakllanishi*……	105-113
Кувандиков О.К., Усаров У.Т. *Электрические, гальваномагнитные свойства редкого металла при различных температурах*	114-125
Komilova N.K., Ravshanov A.X. *Global iqlim o‘zgarishlari sharoitida O‘zbekistonda yuqumli-parazitar kasalliklar tarqalishining hududiy jihatlari*……	126-132

Рахматуллаев И.А., Ботиров Х.З., Чернега Н.В., Хайдаров Х.С. *Двухфотонно-возбуждаемая люминесценция в полициклических ароматических соединениях.....*	133-138
Anarova Sh.A., Jabbarov J.S., Rustamov A.A. Kattalashtirish masshtabiga bog'liq bo'lmagan fraktal o'lchovlarni geometrik modellashtirish…….	138-142
Nurmuhamedova D.K., Kutlieva G.J., Sohibnazarova X.A., Zairova X.T. *Mahalliy sut achituvchi bakteriyalarning antimikrob va bakteriosinogen faolligini tadqiq etish …….*	143-148
Тайланов Н.А., Уринов С.Х. *Численное моделирование уравнения гросса-питаевского.....*	149-159

UDK: 518.1 **DOI: https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v3.139.2.2287**

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО

Н.А.Тайланов[1], С.Х.Уринов[2]

Джизакский Государственный педагогический университет,
Самаркандский Государственный университет имена Шарофа Рашидова

Аннотация. В данной работе рассматривается спектральный метод Фурье с разделением шагом времени для численного моделирования уравнения Гросса-Питаевского. Получены приближенные решения уравнения Гросса-Питаевского с помощью численного программирование в среде Matlab. Показано, что предлагаемый метод значительно уменьшает вычислительные затраты. Это улучшение становится более значительным, особенно для больших временных эволюций.
Ключевые слова: уравнение Гросса-Питаевского, метод расщепления, расщепление, уравнения в частных производных, приближенные численные решения.

Gross-pitaevskiy tenglamasining raqamli simulyatsiyasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada Gross-Pitayevskiy tenglamasini raqamli simulyatsiya qilish uchun Furye spektrini vaqt bosqichlariga bo'lish usuli ko'rib chiqiladi. Gross-Pitayevskiy tenglamasining taxminiy yechimlari Matlab muhitida raqamli dasturlash yordamida olinadi. Taklif etilayotgan usul hisoblash xarajatlarini sezilarli darajada kamaytirishi ko'rsatilgan. Bu , ayniqsa katta vaqtli evolyutsiyalar uchun muhimroq bo'ladi.
Kalit so’zlar: Gross-Pitayevskiy tenglamasi, bo‘lish usuli, bo‘linish, qisman differensial tenglamalar, taqribiy sonli yechimlar

Numerical simulation of the gross-pitaevskiy equation

Abstarct. In this paper, we consider the Fourier spectral method with time step division for numerical simulation of the Gross-Pitaevskii equation. Approximate solutions of the Gross-Pitaevskii equation are obtained using numerical programming in the Matlab environment. It is shown that the proposed method significantly reduces computational costs. This improvement becomes more significant, especially for large time evolutions.
Key words: Gross-Pitaevskii equation, splitting method, splitting, partial differential equations, approximate numerical solutions.

Введение. Конденсат Бозе-Эйнштейна представляет собой агрегатное состояние вещества, характеризующееся тем, что макроскопическое число атомов занимает одно и то же квантовое состояние, т. е. квантовые эффекты проявляются на макромасштабах [1, 2]. Этим объясняется большой экспериментальный и теоретический интерес к изучению конденсации Бозе — Эйнштейна. Конденсация Бозе-Эйнштейна по сути является квантовым фазовым переходом, который связан с проявлением фундаментальных физических явлений, таких как сверхтекучесть в жидком гелии и сверхпроводимость в металлах. Разбавленные слабовзаимодействующие БЭК впервые были экспериментально реализованы в 1995 г. в атомарных газах, а именно в парах рубидия и натрия. В том же году были также зарегистрированы первые признаки конденсации Бозе-Эйнштейна в парах лития, которые позже были более систематически подтверждены [3]. В последние годы произошел взрыв интереса к физике БЭК. Сегодня более пятидесяти экспериментальных групп по всему миру могут регулярно производить БЭК, в то время как за этим последовал огромный объем теоретической работы.

С теоретической точки зрения и для широкого круга экспериментально значимых условий динамика БЭК может быть описана с помощью теории эффективного среднего поля. Этот подход намного проще, чем рассмотрение полного уравнения Шредингера для многих тел, и может довольно точно описать статические и динамические свойства БЭК. Соответствующая модель представляет собой классическое нелинейное эволюционное уравнение, так называемое

уравнение Гросса- Питаевского (ГП) [4, 5]. Фактически это вариант известного нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) [6], представляющего собой универсальную модель, описывающую эволюцию сложных огибающих полей в средах с нелинейной дисперсией. НУШ имеет широкое отношение к другим областям приложений, от оптики до гидродинамики и физики плазмы, а также интересен с математической точки зрения.

1. Вывод уравнения Гросса-Питаевского.

Первые предположения касаются температуры системы. Поскольку нас интересует описание конденсата Бозе-Эйнштейна, представляется целесообразным исследовать систему при очень низких температурах. Для этого указанный выше оператор расширяется на математическое ожидание и его квантовые флуктуации.

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r},t) = F(\mathbf{r},t) + \hat{\psi}(\mathbf{r},t), \qquad \left\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r},t) \right\rangle = F(\mathbf{r},t). \qquad (1)$$

Как упоминалось выше, при низких температурах большая часть бозонных частиц занимает основное состояние системы. Следовательно, можно считать, что значения операторов поля соответствуют операторам основного состояния. Тогда флуктуацию $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ можно интерпретировать как отклонения от этого состояния. Такое описание впервые было введено Боголюбовым в 1947 г. [7] для описания сверхтекучих свойств конденсата Бозе-Эйнштейна. Сам конденсат он считал однородным и не зависящим от времени, поэтому смотрел только на его линейные колебания ($F(\mathbf{r},t) = \text{const}$). Таким образом, им была создана знаменитая боголюбовская теория возбуждения квазичастиц, объясняющая основы сверхтекучих свойств конденсатов при очень низких температурах. Противоположный метод, разработанный Гроссом и Питаевским. Они рассматривали неоднородные, зависящие от времени конденсаты Бозе-Эйнштейна и таким образом искали уникальные свойства конденсата. Поэтому здесь не учитываются тепловые флуктуации, например, $\hat{\psi}(\mathbf{r},t) = 0$, т. е. предполагается, что система находится при нулевой температуре. Следовательно, рассматриваемый оператор можно заменить его математическим ожиданием, которое тогда называется параметром порядка или просто волновой функцией конденсата. Он описывает плотность частиц системы и определяет ее общее число частиц.

$$|F(\mathbf{r},t)|^2 = n(\mathbf{r},t), \qquad \int d\mathbf{r}\, n(\mathbf{r},t) = N. \qquad (2)$$

Видно, что оператор заменяется классическим комплексным полем, то есть игнорируются все квантовые свойства конденсата. Это связано с тем, что при нулевой температуре все частицы находятся в одном и том же состоянии, поэтому инвариантность операторов частиц не имеет значения. Фактически это похоже на переход от квантовой электродинамики к классической электродинамике. Если большинство фотонов находятся в одном и том же состоянии, электромагнитные поля можно описывать с помощью классических функций вместо операторов.

Второе предположение, это - псевдопотенциал. Как указано, мы рассматриваем систему при очень низких температурах. Поэтому можно предположить, что волновое число де Бройля k частиц велико по сравнению с другой характерной длиной системы. Самое главное, что можно ожидать, что изменение потенциала взаимодействия будет намного меньше, чем волновое число частиц, поэтому взаимодействие между двумя частицами можно описать одним числом, т. е. (σ-волновым) длина распространения λ. Подробно полное рассеяние частицы характеризуется приходящей плоской волной и уходящей сферической волной, где определяется $f(k,\mathbf{r}/r)$ амплитудой рассеяния. При низких температурах эту амплитуду можно заменить длиной рассеяния

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-ik\cdot r} + f\left(k, \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\frac{e^{-ik\cdot r}}{r} \to 1 - \frac{a}{r}.$$

Следующее важное допущение состоит в том, что конденсат является разбавленным, а это означает, что среднее значение всегда намного меньше, чем одна частица на объем распределения, $\bar{n}|a|^3 \ll 1$, где $\bar{n}$ среднее значение представляет собой плотность частиц. Во-первых, это гарантирует, что необходимо исследовать только взаимодействия двух частиц, поскольку взаимодействиями трех частиц можно пренебречь. Во-вторых, потенциал следует рассматривать как псевдопотенциал, чтобы можно было избежать любых связанных состояний

между двумя частицами. Кроме того, потенциал взаимодействия связан с длиной распространения

$$U(r - r') = g\delta(r - r'), \qquad g = \frac{4\pi a\hbar^2}{m}. \tag{3}$$

Прежде чем вывести уравнение Гросса-Питаевского, предположим, что выполнено условие разбавления конденсатами. При длинах распространения в несколько нанометров и значениях плотности от 10^{13} см $^{-3}$ до 10^{15} см $^{-3}$ параметра разбавления $\bar{n}|a|^3 < 10^3$ обычно достаточно, чтобы рассматривать этот конденсат как сжиженный. При этих предположениях можно сформулировать уравнение Гросса-Питаевского. Таким образом, мы просто заменяем в уравнении движения оператора квантового поля оператор классической волновой функции конденсата. Тогда подстановка полного потенциала взаимодействия в псевдопотенциал и интегрирование по нему приводит к первоначально сформулированному уравнению Гросса-Питаевского

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r},t) + g|\Psi(\mathbf{r},t)|^2\right]\Psi(\mathbf{r},t). \tag{4}$$

Это уравнение аналогично уравнению Шредингера. Единственное отличие состоит в последнем члене в скобках, что связано с взаимодействием системы. Этот член приводит к тому, что уравнение становится нелинейным, что приводит к совершенно новым и более богатым свойствам конденсата по сравнению с невзаимодействующими. Однако это делает аналитическое решение уравнения почти невозможным, поскольку нелинейность всегда значительно усложняет динамику.

2. Свойства уравнения Гросса-Питаевского.

Обсудив вывод уравнения Гросса-Питаевского, выберем внешний потенциал, подходящий для рассматриваемой здесь задачи. Т - гармонический осциллятор внешнего потенциала.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\sum \omega_i^2 r_i^2 \tag{5}$$

где m — масса частицы. Потенциал характеризуется тремя разными частотами колебаний, соответствующими разным пространственным измерениям. Для этих частот вводится новая шкала длины, называемая длиной гармонического осциллятора. Эта шкала длины может быть использована для обезразмеривания уравнения Гросса-Питаевского (4) путем изменения размерных переменных, например

$$a_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}, \qquad \omega_0 = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{3/2}.$$

Это также выбрано для нормализации $\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)$ функция. Полученное уравнение может быть написано в виде:

$$2i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{r},t) = \left[-\nabla^2 + r^2 + 8\pi\frac{Na_s}{a_0}|\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)|^2\right]\hat{\Psi}(\mathbf{r},t). \tag{6}$$

Можно видеть, что единственная оставшаяся релевантная шкала — это отношение общего числа частиц к длине распространения, деленное на длину гармонического Na_s/a_0 осциллятора. Фактически можно показать, что это отношение пропорционально отношению полной кинетической энергии, которой обладает конденсат, E_k к полной энергии взаимодействия. Из уравнения Гросса-Питаевского можно заключить E_i, что полная энергия взаимодействия $|g|N\bar{n}$ пропорциональна , что здесь может быть представлено средней плотностью $\bar{n} = N/a_0^3$. С другой стороны, кинетическая энергия $N\hbar\omega_0$ порядка и тогда N/a_0^3 пропорциональна . В общем случае отношение энергий пропорционально безразмерной величине, находящейся в безразмерном уравнении Гросса-Питаевского (6)

$$\frac{E_i}{E_k} \sim \frac{N|a_s|}{a_0}.$$

Порядок значения этого отношения сильно зависит от экспериментальной установки и типа используемых частиц. Для экспериментов с натрием в MIT использовали конденсаты с относительно большим числом атомов p от 10^{-6} до 10^{7} · создан · Значит, это отношение $Na_s / a_0 \gg 10^3 - 10^4$ равно , то есть взаимодействие между атомами натрия много больше, чем средняя кинетическая энергия атомов. Учитывая, что отталкивающее взаимодействие наряду с кинетической энергией разделяет конденсат, влиянием кинетического члена в уравнении Гросса-Питаевского можно пренебречь, так как оно по крайней мере в тысячу раз меньше влияния взаимодействия. Это, казалось бы, грубое приближение называется приближением Томаса-Ферми и значительно упрощает уравнение Гросса-Питаевского.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{r}, t) = \left(V(\mathbf{r}, t) + g|F(\mathbf{r}, t)|^2\right) F(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Еще одной особенностью приближения Томаса-Ферми является его наглядность. Поэтому нельзя пренебрегать изменением кинетической плотности числа частиц в связи с отталкивающим взаимодействием. Здесь следует отметить, что применение приближения Томаса-Ферми весьма ограничено рассматриваемым экспериментом. Например, эксперименты, с рубидием в JILA, не могут дать конденсат с равным числом атомов, поэтому его отношение намного меньше. Таким образом, это приближение не может быть использовано для количественной характеристики конденсата. Более того, для экспериментов с бозонами, притягивающимися друг к другу, например с литием, нельзя использовать и p-приближение. Это связано с тем, что кинетическая энергия противостоит взаимодействию притяжения между частицами. Следовательно, пренебрежение кинетическим членом сразу же приводит к коллапсу конденсата Бозе-Эйнштейна.

В модели БЭК нелинейность вводится межатомными взаимодействиями, учитываемыми через эффективное среднее поле. Важно отметить, что изучение уравнения ГП позволяет предсказать и описать важные и экспериментально значимые нелинейные эффекты и нелинейные состояния (такие как солитоны и вихри), которые составляют предмет этой статьи.

Коэффициент g, задающий силу нелинейности в ГП (7), может принимать как положительные, так и отрицательные значения; это связано с тем, что длина рассеяния может быть $a > 0$ (например, для БЭК рубидия или натрия) или $a < 0$ (например, для БЭК лития). Эти два случая соответствуют, соответственно, отталкивающему и притягивающему взаимодействию между атомами или дефокусировке и фокусировке нелинейностей керровского типа на языке нелинейной оптики [8]. Важно отметить, что можно управлять межатомным взаимодействием, изменяя пороговую динамику столкновений и, следовательно, изменяя знак или величину длины рассеяния. Это можно сделать при подаче заявления внешнее магнитное поле B, которое контролирует длину рассеяния из-за быстрого изменения свойств столкновения, связанного с пороговым резонансом рассеяния, являющимся резонансом Фешбаха (см., например, [9] для теоретических аспектов, а также для соответствующих экспериментальных результатов для конденсатов натрия и рубидия соответственно). В частности, поведение длины рассеяния вблизи резонансного магнитного поля Фешбаха B_0 обычно имеет вид:

$$a(B) = \tilde{a}\left(1 - \frac{D}{B - B_0}\right)$$

где $\tilde{a}$ — значение длины рассеяния вдали от резонанса, а D — ширина резонанса. С другой стороны, дополнительный способ настройки длины рассеяния может быть реализован в низкоразмерных установках. Возможность управления взаимодействиями и столкновительными свойствами атомов имела решающее значение для целого ряда экспериментальных открытий, таких как образование ярких солитонов материи-волны [10], формирование молекулярных БЭК или раскрытие кроссовера BEC-BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [11].

В частности, мы приводим вывод уравнения ГП и некоторые его основные черты. Мы обсуждаем различные случаи отталкивающих и притягивающих межатомных взаимодействий

и способы управления ими с помощью резонансов Фешбаха. Мы описываем внешние потенциалы, которые можно использовать для ограничения БЭК, а также то, как их форма приводит к определенным типам упрощенных описаний среднего поля.

Внешний потенциал $V(\mathbf{r},t)$ в ГП (7) может принимать различный вид в зависимости от типа захвата, т. е. магнитного или оптического. В частности, если в первых экспериментах БЭК удерживались с помощью магнитных полей, то позднее стало возможным удержание БЭК и в чисто оптических полях. Первое чисто оптическое удержание БЭК было осуществлено в 1998 г., где конденсат сначала создавался в магнитной ловушке, а затем загружался в оптическую дипольную ловушку (см., например, соответствующие обзоры в [12]). Однако в эксперименте 2001 г. [13] было продемонстрировано, что можно напрямую создавать и удерживать БЭК в оптической дипольной ловушке. Преимущество оптических дипольных ловушек в том, что их форма чрезвычайно гибкая и управляемая. Примером такого управления является частный случай оптических потенциалов, называемых оптическими решетками, в которых световое поле представляет собой стоячую волну; в таком случае результирующий дипольный потенциал представляет собой кристаллическую решетку потенциальных ям.

В первых соответствующих экспериментах [14] холодные атомы были захвачены в оптические решетки, настроенные близко к резонансу (т. е. частота лазера была близка к частоте атомного перехода); в результате наблюдалось эффективное диссипативное поведение из-за того, что спонтанное излучение преобладало над силой дипольного захвата. Однако в 1996 г. для захвата лазерно-охлажденных атомов впервые были использованы недиссипативные далеко нерезонансные оптические решетки. Такие сильно расстроенные оптические потенциалы решетки оказались полезными для объяснения новых физических явлений в БЭК (см., например, недавний обзор [15]). В случае «стандартной» магнитной ловушки внешний потенциал принимает типичный гармонический вид:

$$V_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2) \qquad (8)$$

где, вообще говоря, частоты ловушек $\omega_x,\omega_y,\omega_z$, по трем направлениям различны. В результате геометрия ловушки, а следовательно, и форма самого конденсата могут варьироваться от изотропных до сильно анизотропных. В частности, если $\omega_x=\omega_y$ $\omega_r \ll \omega_z$, то ловушка изотропна и БЭК почти сферическая, а случаи $\omega_z<\omega_r$ или $\omega_r<\omega_z$ описывают анизотропные ловушки, в которых БЭК соответственно вытянутый, «сигарообразный» или уплощенный, «блинчатый». Последние анизотропные случаи и особенно сильно анизотропные ($\omega_z \ll \omega_r$ или $\omega_r \ll \omega_z$) представляют особый интерес, поскольку они связаны с эффективно более низкой размерностью БЭК, а именно квазиодномерным (1D) и квазидвумерным (2D), соответственно. При температурах, близких к нулю, когда фазовые флуктуации пренебрежимо малы, такие слабо взаимодействующие 1D- и 2D-конденсаты возможны и были реализованы экспериментально в оптических и магнитных ловушках, в оптических потенциалах решетки, а также поверхностные микроловушки [16]. В этом контексте стоит упомянуть, что даже предельный случай чисто одномерного, сильно взаимодействующего, так называемого газа Тонкса-Жирардо (в котором взаимодействующий бозонный газ ведет себя как система свободных фермионов) недавно наблюдалось экспериментально [17].

3. Уравнение Гросса- Питаевского

Как было отмечено выше, что в основе математической постановки задачи о распространении конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК) лежит уравнение Гросса-Питаевского (ГП) [18-20]. Уравнение Гросса-Питаевского описывает распространение нелинейных ленгмюровских волн, волн в глубокой воде; волны в линиях передачи, акустические волны в жидкостях с пузырьками и, прежде всего, распространение оптического излучения в нелинейных средах. Типичным применением уравнения Гросса-Питаевского является динамика оптических импульсов в оптическом волокне. Эволюция во времени огибающей оптического импульса в волокне хорошо аппроксимируется уравнением Гросса-Питаевского, включая описание очень длинных трансокеанских оптических линий связи, см., например, [21, 22]. С другой стороны, уравнение широко используется в прикладных науках и технике для описания различных

явлений, включая, помимо прочего, слабонелинейные океанские волны [23], распространение импульсов в оптических волокнах и квантовое состояние физической системы. Например, анализ этого уравнения предлагает возможное объяснение загадки возникновения волн-убийц [24]. К сожалению, все эти приложения нелинейного уравнения Гросса-Питаевского требуют эффективного численного моделирования.

Уравнения в частных производных — широко используемый математический аппарат при разработке моделей в различных областях науки и техники. К сожалению, явное решение этих уравнений в аналитическом виде возможно только в частных простых случаях, и, как следствие, возможность анализа математических моделей обеспечивается путем решения этих уравнений приближенными численными методами. В последние годы нелинейные эволюционные уравнения стали очень активной областью для описания различных нелинейных процессов.

При моделировании уравнения Гросса- Питаевского могут быть использованы многие методы : схема Кранка-Николсона, метод классиков, метод псевдоспектрального расщепления шага, метод сохранения гамильтониана и многие другие (см. [25], [26], [27]). Один из наиболее популярных методов интегрирования уравнения Гросса-Питаевского, называемый пошаговым, был предложен Ф. Таппертом [28], и подробно изучен в [29]. Метод расщепления шага можно рассматривать как вариант подхода расщепления оператора Стрэнжа [29] в сочетании с псевдоспектральным методом. Метод расщепленного шага основан на идее разделения уравнения на две части, нелинейную и линейную части [30, 31]. В численном анализе метод расщепленного шага (Фурье) представляет собой псевдоспектральный численный метод, используемый для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такое название возникает по двум причинам. Во-первых, метод основан на вычислении решения небольшими шагами и отдельном рассмотрении линейного и нелинейного шагов (см. ниже). Во-вторых, необходимо преобразовать Фурье вперед и назад, потому что линейный шаг делается в частотной области , а нелинейный шаг делается во временной области. Пример использования этого метода в области распространения световых импульсов в оптических волокнах, где взаимодействие линейных и нелинейных механизмов затрудняет поиск общих аналитических решений.

В данной статье мы представляем спектральный метод Фурье с разделением шагом времени, который использовали Бао и другие [32] для численного решения уравнения Гросса-Питаевского в квазиклассическом режиме. Наконец, отметим, что метод Фурье с разделением шагом времени является очень мощным универсальным численным методом для решения уравнения Гросса-Питаевского, который может быть применен к большому количеству различных физических ситуаций. Эффективность этого метода и высокая точность решений делают метод Фурье с разделением шагом времени хорошим выбором для решения экспериментальных ситуаций, которые очень требовательны к числовым характеристикам.

Основные уравнения

Эволюция БЭК из N атомов массы M описывается уравнением Гросса-Питаевского для волновой функции ψ (x, t)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\left(\frac{\hbar^2}{2m}D+V(t,x)+NU_0|\psi|^2\right)\psi. \qquad (9)$$

U_0 описывает взаимодействие между атомами в конденсате и имеет вид $U_0=\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$; a_s длина рассеяния s-волны (положительной для отталкивающего взаимодействия и отрицательной для притягивающего взаимодействия). Волновую функцию удобно нормализовать, потребовав

$$\int_{R^3}|\psi(x,t)|^2\,dx=1.$$

Внешний потенциал $V(\vec{x})$ $(\vec{x}=x,y,z)$ позволяет моделировать воздействие внешнего мира на конденсат, в частности ловушки. Большую часть времени бозоны удерживаются в небольшой области пространства (оптическими и/или магнитными средствами). Эта ситуация моделируется с помощью ловушечного потенциала с минимумом в центральной части. В

общем, любой (регулярный) потенциал с минимумом можно локально аппроксимировать гармоническим потенциалом, причем так, чтобы конденсат оставался в той части, где преобладает квадратичный член. Поэтому

$$V(x)=\frac{m}{2}(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2). \quad (10)$$

где $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ частоты ловушек в направлениях x, y и z соответственно. Введем следующие замены переменных

$$t=\frac{t}{w_m},\qquad x=xa_0,\quad \psi=a_0^{-3/2}\psi,\qquad a_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}},\qquad \omega_m=\min(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$$

Тогда можно получить безразмерное уравнение Гросса-Питаевского

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{1}{2}D+V+\beta|\psi|^2\right)\psi. \quad (11)$$

$k=b=\frac{4pa_sN}{a_0}$ - безразмерный параметр. Потенциал имеет вид

$$V(x)=\frac{1}{2}(g_x^2x^2+g_y^2y^2+g_z^2z^2) \quad . (12)$$

$\gamma_x=\frac{\omega_x}{\omega_m},\ \gamma_y=\frac{\omega_y}{\omega_m},\ \gamma_z=\frac{\omega_z}{\omega_m}$. GPE включает член для потенциала ловушки, а также среднее поле взаимодействия между атомами в газе, которое проявляется как нелинейный член. Взаимодействия притяжения, а также взаимодействия отталкивания учитываются в уравнении Гросса- Питаевского посредством использования константы фокусировки, которая может быть положительной (фокусировка) или отрицательной (дефокусировка).

Методология. Нелинейный член возникает из-за взаимодействия среднего поля между атомами. От времени $t=t_n$ до $t=t_{n+1}$, уравнение Гросса - Питаевского (9) решается в два этапа расщепления. Один решает первым

$$ie\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{e^2}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}, \quad (13)$$

для временного шага длины k с последующим решением:

$$ie\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\frac{x^2}{2}\psi(x,t)+k|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) \quad (14)$$

для того же шага по времени, уравнение (14) дискретизируется по пространству спектральным методом Фурье и точно интегрируется по времени.

Численные результаты. В двух важных случаях трехмерное уравнение Гросса-Питаевского можно приближенно свести к уравнению в частных производных меньшей размерности, например $d=2$. Тогда с помощью $\omega_x\gg\omega_y,\ \omega_z\gg\omega_x,\ \gamma_y\gg 1,\ \gamma_z\gg 1$ аппроксимации трехмерное уравнение Гросса-Питаевского (1) можно свести к двумерному. Тогда для гармонического потенциала имеем следующее выражение

$$V(x)=\frac{1}{2}(x^2+g_y^2y^2). \quad (7)$$

В соответствии с двумя типами нелинейных режимов выберем $k=1.001>0$ для отталкивающего взаимодействия и $k=-1.8761<0$ для притягивающего взаимодействия. Мы суммируем численные результаты на Рис. (1-6), задав исходные $\psi(x,y)=g_s(x,y)$ данные, где $s=1$,

$$g_s(x,y):=\frac{1}{\sqrt{ps}}\exp\left(\frac{(x^2+y^2)}{2s}\right), \quad (8)$$

При этом мы предполагаем, что $s=1$.

Сначала будем рассматривать дефокусирующий случай для конденсата. Мы решаем эту задачу на $R = [-10, 10]^2$ с пространственным шагом сетки $h = 1/32$ и временным шагом $Dt = 0.0001$. Мы выбрали $N = 10$ в нашей схеме, уравнение. (1), а количество узлов сетки как по x , так и по y должно быть равно 200 с $Dt = 0.0001$.. На рис. 1-4 показано моделирование неравновесной конденсации Бозе-Эйнштейна в различные моменты времени $0 \pounds t \pounds 20$. Из рисунки видно, что неравновесный БЭК может достигать своему максимальному значению или соответствующему стационарному состоянию примерно при $t = 20$.

1. Случай дефокусировки : $k = 1 > 0$. $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ $Dt = 0.01, h = \frac{1}{32}$.

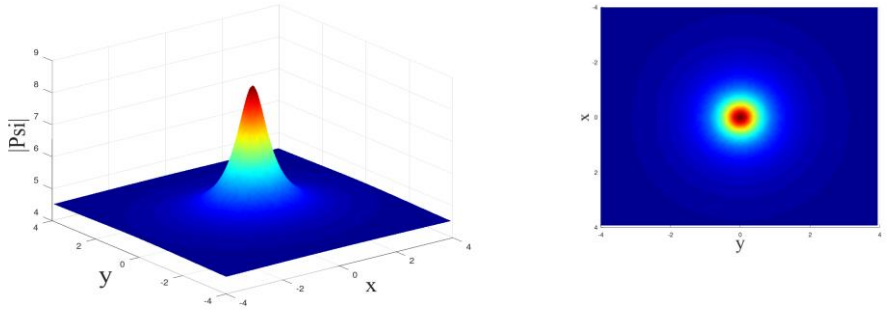


Fig.1. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the defocusing case at $t = 10$, $Dt = 0.01$, $h = 1/32$.

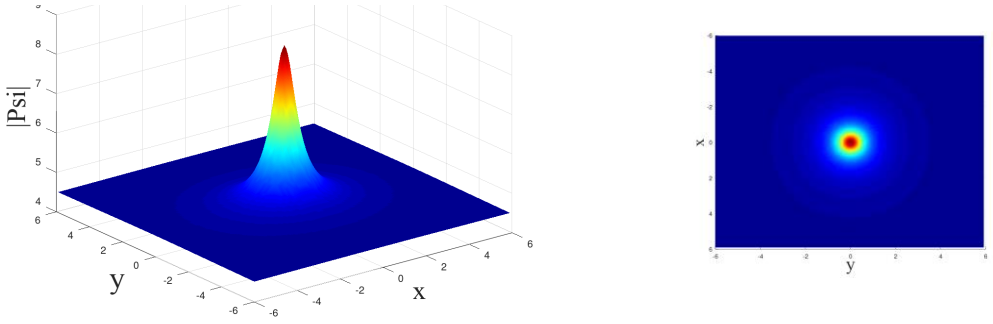


Fig.2. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the defocusing case at $t = 10$, $Dt = 0.01$, $h = 1/32$.

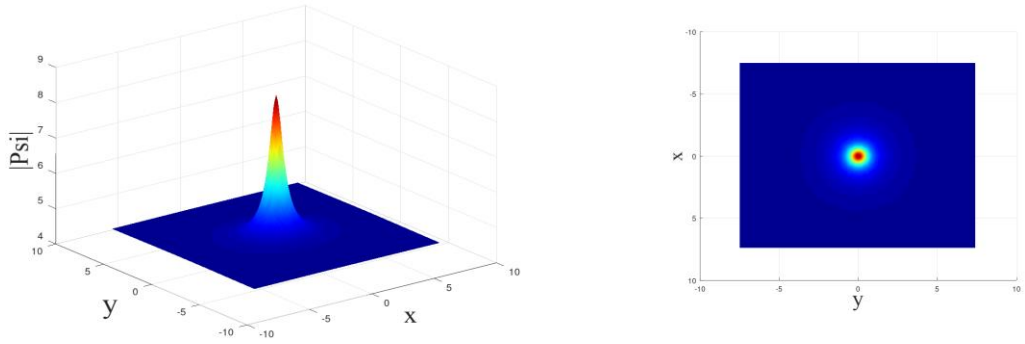


Fig.3. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the defocusing case at $t = 15$, $Dt = 0.01$, $h = 1/32$.

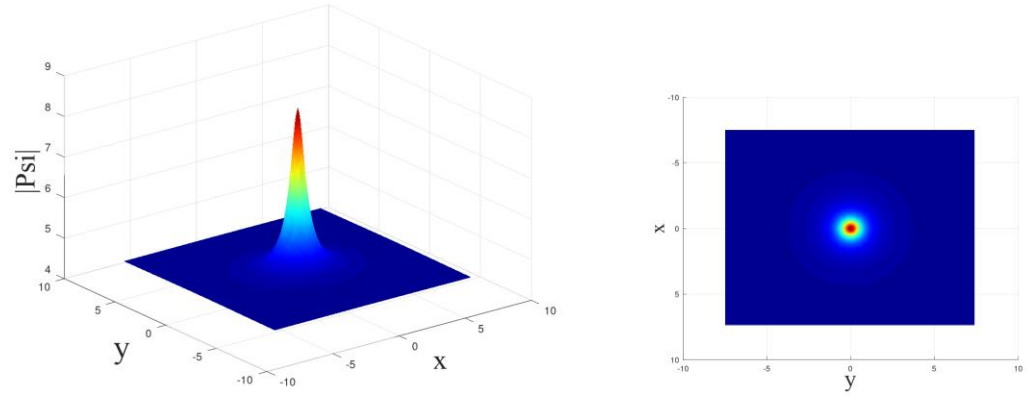


Fig.4. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the defocusing case at $t = 20,\quad Dt = 0.01,\ h = 1/32.$

2. *Случай фокусировки*: для случая фокусировки мы решаем задачу на интервале $R = [-6, 6]^2$ с пространственным шагом сетки $h = 1/52$ и временным шагом $k = 0.0003$. Мы выбрали $N = 10$ в нашей схеме, уравнение. (1), а количество узлов сетки как по x , так и по y должно быть равно 200 с $Dt = 0.0001$ при тех же гауссовых начальных данных. В этом случае уравнение Гросса-Питаевского может иметь конечное решение с разрушением. В данной ситуации можно предполагать, что положительный гармонический потенциал притягивает и удерживает охлажденные бозонные атомы. С другой стороны, инвертированный (отрицательный) гармонический потенциал отталкивает и поддерживает дисперсию, компенсирующую влияние эффекта фокусировки.

На рис. 5, 6 показано моделирование неравновесной конденсации Бозе-Эйнштейна в различные моменты времени $0 \pounds\ t \pounds\ 20$.

2. *Случай фокусировки* : $k = -1.8761 < 0;\ V(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}\ Dt = 0.01,\ \ h = 1/52.$

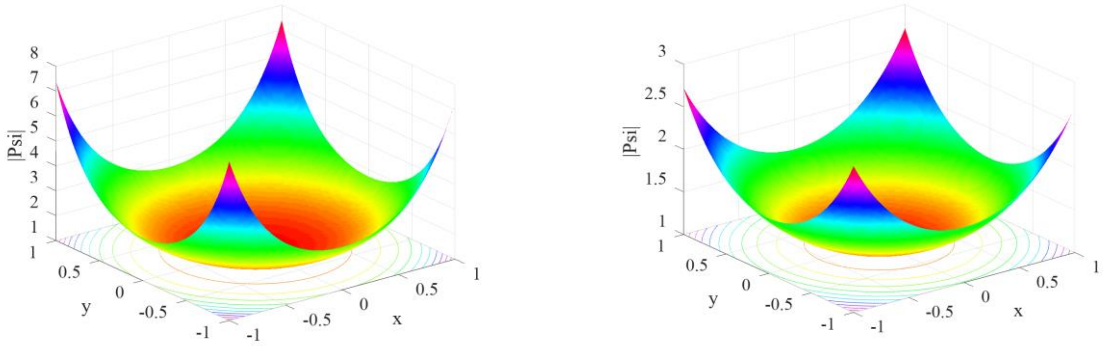


Fig.5. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the focusing case at $t = 10,\quad Dt = 0.01, h = 1/52.$

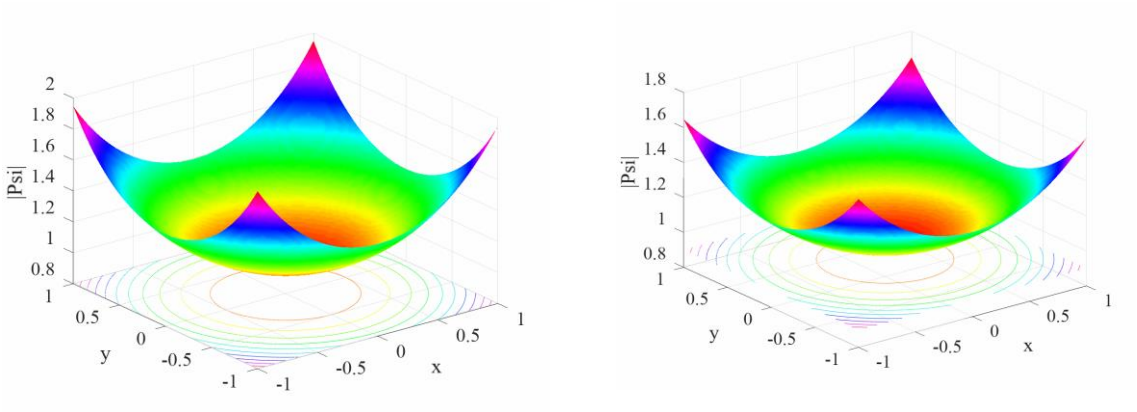


Fig.6. Numerical solution of the Gross-Pitaevsky at various parameters for the focusing case at t = 20, Dt = 0.01, h = 1/52.

Согласно результатам, представленным на этих рисунках, метод Фурье с разделением шагом времени обеспечивает высокую точность численного решения уравнения Гросса - Питаевского. С другой стороны, как видно из рисунков, результат, полученный по неявной экспоненциальной разностной схеме, имеет лучшие результаты, чем результаты, полученные по другим численным схемам. Эти расчеты показывают, что точность решений достаточно высока даже в случае небольшого числа узлов сетки.

Наконец, отметим, что метод Фурье с разделением шагом времени является очень мощным универсальным численным методом для решения уравнения Гросса - Питаевского, который может быть применен к большому количеству различных физических ситуаций. Эффективность этого метода и высокая точность решений делают данный метод хорошим выбором для решения экспериментальных ситуаций, которые очень требовательны к числовым характеристикам.

Заключение В заключении заметим, что данной работе мы применили метод расщепления по физическим про¬цессам с использованием преобразования Фурье для численного моделирования моделирования уравнения Гросса - Питаевского . Приближенные численные решения уравнения Гросса - Питаевского получены с помощью программы Matlab. Показано, что предлагаемый метод значительно увеличивает вычислительные затраты. Это улучшение становится более значительным, особенно для больших временных эволюций нелинейных систем. Использованная схема может быть использована как эффективный инструмент в вычислительной математике, а именно в классе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих теоретические задачи квантовой физики и техники.

Литература

1. Bose S.N., Z. Phys. 26, 178 (1924).
2. Einstein A., Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 261 (1924).
3. Bradley C.C., Sackett C.A., Tollett J.J., Hulet R.G., Phys. Rev. Lett.
4. Gross E.P., J. Math. Phys. 4, 195 (1963).
5. Pitaevskii L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Soviet Phys. JETP, 13 (1961), 451–454.
6. Sulem C., Sulem P.L., The Nonlinear Schrodinger Equation (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999).
7. Bogoliubov N. N. On the theory of superfluidity, J. Phys. (USSR) 11, 23 (1947).
8. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals (Academic, New York, 2003).
9. Weiner J. Cold and Ultracold Collisions in Quantum Microscopic and Meso¬scopic Systems (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

10. Strecker K.E., Partridge G.B., Truscott A.G., Hulet R.G. New J. Phys. 5, 73 (2003)
11. Bartenstein M., Altmeyer A., Riedl S., Jochim S., Chin C., Denschlang J.H., Grimm R. Phys. Rev. Lett. 92, 203201 (2004).
12. Weiner J., Bagnato V.S., Zilio S., Julienne P.S. Rev. Mod. Phys. 71, 1 (1999).
13. Barrett M.D., Sauer J.A., Chapman M.S. Phys. Rev. Lett. 87, 010404 (2001).
14. Jessen P.S., Gerz C., Lett P.D., Phillips W.D., Rolston S.L., Spreeuw R.J.C., Westbrook C.I. Phys. Rev. Lett. 69, 49 (1992).
15. Morsch O., Oberthaler M.K. Rev. Mod. Phys. 78, 179 (2006).
16. Hansel W., Hommelhoff P., Hansch T.W., Reichel J. Nature (London) 413, 501 (2001).
17. Paredes B., Widera A., Murg V., Mandel O., Folling S., Cirac I., Shlyapnikov G.V., T.W. Haansch, I. Bloch, Nature 429, 277 (2004).
18. Gross E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems, Nuovo. Cimento. 20 (1961), 454–457.
19. Pitaevskii L. P. Vortex lines in an imperfect Bose gas, Soviet Phys. JETP, 13 (1961), 451–454.
20. Pitaevskii L., Stringari S. Bose-Einstein Condensation, International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, Clarendon Press, 2003.
21. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, 2007.
22. Lushnikov P.M. Fully parallel algorithm for simulating dispersion-managed wavelength-division-multiplexed optical fiber systems, Opt. Lett. 27 (11) (2002) 939–941.
23. Dysthe K.B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci. 369 (1736) (1979) 105–114.
24. Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Modulation instability of Stokes wave→ freak wave, JETP Lett. 81 (6) (2005) 255–259.
25. Taha T.R., Ablowitz M.I. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation, J. Comput. Phys. 55 (2) (1984) 203–230.
26. Greig I., Morris J. A Hopscotch method for the Korteweg–de–Vries equation, J. Comput. Phys. 20 (1) (1976) 64–80.
27. Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd ed., Krieger Publishing Co., Malabar, Fla, 1994.
28. Hardin R.H., Tappert F.D. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations SIAM Rev. Chron. 15 (1973) 423.
29. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes, SIAM J. Numer. Anal. 5 (3) (1968) 506–517.
30. Trefethen L. N., (2000), Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia.
31. Bogomolov Y. L. and Yunakovsky A. D., (2006), Split step Fourier method for nonlinear Schrodinger equation, Proceedings of the International Conference Day on Diffraction, pp. 34-42.
32. Bao W., Jaksch D. and Markowich P. A. Numerical Solution of the Gross-Pitaevskii Equation for Bose-Einstein Condensation, J. Comput. Phys. 187, 318 (2003).

SAMARQAND UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC REPORTS**

Texnik muharrir **Sh.Xoliqulov**

Muharrirlar:

I.Sulaymonov - fil.f.d., dotsent
E.Arziqulov - f.-m.f.d., dotsent
O.Yusupova - fil.f.n., dotsent

Mas'ul muharrirlar:

A. Sh. Yarmuxamedov - f.-m.f.n.
X. S. Haydarov - f.-m.f.n., dotsent

Muassis: Samarqand davlat universiteti Manzil: 140104,
Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.
Telefon: (0 366) 240-38-47, Faks: (0 366) 239-13-87 e-mail:
axborotnoma.uz
SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi. Bosishga 30.06.2023-yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.
Buyurtma raqami 570. Adadi 30 nusxa.

ISSN 2181-1296

