ISNN:2181-1296

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 1/2 (137)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC JOURNAL**

2023-yil, 1-son (137/2) **ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI**

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d., professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.d., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

ANIQ FANLAR

SH.A.ALIMOV	- O‘zFA akademigi
S.N.LAKAYEV	- O‘zFA akademigi (SamDU)
M.M.MIRSAIDOV	- O‘zFA akademigi
A.S.SOLEEV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.IKROMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
B.X.XO‘JAYAROV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.G.YAGOLA	- f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I.I.JUMANOV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
X.X.XUDOYNAZAROV	- t.f.d., professor (SamDU)
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya
L.SABIROV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
A.JUMABOYEV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
N.N.NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
O.Q.QUVONDIQOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.RAXMATULLAYEV	- f.-m.f .d., professor
A.SH.YARMUXAMEDOV	- f.-m.f .n. (SamDU)
X.S.XAYDAROV	- f.-m.f .n., dotsent (SamDU)

TABIY FANLAR

M.X.ASHUROV	- O‘zFA akademigi
N.B. FERAPONTOV	- k.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
SH. M. TUGIZOV	- professor, Koliforniya universiteti, AQSh
H. I. AKBAROV	- k.f.d., professor (O'zMU)
E. A. ABDURAXMONOV	- k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV	- k.f.d., professor (SamDU)
L. A. BULAVIN	- Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
X. Q. XAYDAROV	- b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV	- b.f.d., professor (SamDU)
Sh. T. XOLIQULOV	- g.f.d., professor (SamDU)
S. B. ABBASOV	- g.f.d., professor (SamDU)
Q. S. YARASHEV	- g.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK	- Seul univeriteti professori, Koreya
D.B.XURSANOV	- g.f.f.d., dotsent (SamDU)
M. S. QUZIYEV	- b.f.f.d., dotsent (SamDU)

Obuna indeksi – yakka tartibdagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

Б.Х.Хужаёров, А.И.Усмонов, Ф.Б.Холлиев *Анализ переноса вещества в пористой среде на основе диффузионного уравнения с много-членными дробными производными по времени*.....	2-8
Жуманов И.И., Сафаров Р.А. *Идентификации микрообъектов на основе использования текстурных и геометрических особенностей изображений*.....	9-18
Tashmatova R.V., Ruziyev I.X., Bebitova K.E. *Kimyo darslarida didaktik o'yinlardan foydalanish haqida mulohazalar*.....	19-23
Жуманов И.И., Холмонов С.М. *Оптимизация прогнозирования нестационарных объектов в условиях большой параметрической неопределенности*	24-33
Safarov T.N. *Uch o'lchovli affin fazosidagi geometriyalar*.....	34-39
Хасанов Т.Г. *Интегрирование нагруженного уравнения кортевега-де фриза с источником в случае движущихся собственных значений в классе быстроубывающих функций*.....	40-50
Nazarov F.M., Eshtemirov B.Sh., Saydullayev Q.Sh. *Microscopic and macroscopic flow models of traffic management*.....	51-58
Tursunov F., Dong Qiu *Zol-gel usulida SiO_2 mikrosferik zarrachalarning sintezi*.....	59-62
Турсунов Ф.Р., Рузикулов Ф.Ф. *Регуляризация задачи коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области*	63-69
Trobov X.T., Atavullayeva Sh.Sh., Karimov X.R., Tursunova G.X., Djurayeva R.A. *Polimer gellarda reagentsiz usulda elektrolitlar aralashmalarini ajratish*.....	70-75
Турдиев Х.Х., Болтаев А.А. *Прямая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в вязкоупругой анизотропной среде*.....	76-84
Begimkulova Sh.A., Mirzayev Sh.E., Hasanov R., Rajabova M., Ivanes A., Nasimov A.M. *Study of adsorption properties OF Mg^{2+} modified Li - Mn spinel*	85-89
Qurbonov Sh.B., Abdiyeva Z.A. *Viloyat ma'muriy markazlarini iqtisodiy geografik o'rganishning ba'zi bir masalalari*.....	90-96
Arziqulov E.U., Urolov Sh.Z., Z. Shaymardanov Sh., Jalolov R.R., Rustamova B.N. *Rux oksidi nanokristallari strukturasi va optik xossalariga yuqori haroratli qizdirishning ta'siri*.....	97-102
Rustamova N., Amriddinova D. *Isolation, identification and optimization of exopolysaccharide-based bioflocculant synthesis by soil bacteria bacillus atrophaeus NR-12*.....	103-109
Ishankulov T., Mannonov M., Mukarramxujayeva N. *Bir jinsli bo'lmagan polianalitik tenglama yechimini birlik doira chegarasining qismidan davom ettirish*.....	110-115
Олимов Х.К., Канокова Ш.З., Шодмонов М.З., Кахорова А.Н. *Анализ распределений поперечных импульсов заряжённых частиц в Pb+Pb Столкновениях при $(s_{nn})^{1/2}=2.76$ ТэВ*.....	116-120
Xudoyberdiyeva I.A. *Navoiy viloyatida chorvachilik tarmoqlarini hududiy tashkil etishning iqtisodiy-geografik jihatlari*	121-125
Qurbonov H., Bozorova O'. *Qayta tiklanish jarayonining kutish joylari soni cheklangan xizmat ko'rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotini o'rganishga tadbiqi*.....	126-131

УДК 517.946 https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v1.1.1885

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ф.Р.Турсунов, Ф.Ф.Рузикулов
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
E-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru

Аннотация. В статье изучается задача продолжения решения линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области и данные Коши заданы точны. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения. Найденная формула позволяет сформулировать простой и удобный критерий разрешимости задачи Коши.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

Chegaralangan sohada birinchi tartibli o’zgarmas koeffisientli chiziqli elliptik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining regulyarizatsiyasi

Annotasiya. Maqolada G soha chegarasi ∂G ning bir qismi S silliq chiziqda berilgan qiymatlariga ko’ra, birinchi tartibli o’zgarmas koeffisientli chiziqli elliptik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechimini davom ettirish masalasi qaraladi. Qaralayotgan masala, matematik fizikaning yechim boshlang’ich shartlarga uzluksiz ravishda bog’liq bo’lmgan masalalari qatoriga kiradi. Masalada yechim mavjud va biror yopiq sohada uzluksiz differensiallanuvchi, hamda Koshi shartlari aniq berilgan deb faraz qilinadi. Bu hol uchun oshkor ko’rinishda yechimni davom ettirish masalasi quriladi. Topilgan formula Koshi masalasi ychimini qulay topish imkonini beradi.

Kalit so’zlar: Koshi masalasi, nokorrekt masalalar, Karleman funksiyasi, regulyarizasiya, regulyarizasiyalashgan yechim, davom ettirish formulalalari.

Regularization of the Cauchy problem for the first-order linear elliptic systems with constant coefficients in a bounded domain

Abstract. In the paper the continuation problem for the solution of the first order elliptic type linear system equations with constant coefficients in the domain G by given values on the smooth part S of the boundary ∂G is studied. The problem under consideration belongs to the ill-posed problems of mathematical physics, since there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that a solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain, and the Cauchy data are given exact. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established. The found formula allows us to formulate a simple and convenient criterion for the solvability of the Cauchy problem

Key words: Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.

Через $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ будем обозначать точки двумерного пространства R^2.

Пусть G - ограниченная односвязная область в R^2 с границей $\partial G = S \cup Q$, состоящей из отрезка $Q = \{(y_1, 0) : a_1 \le y_1 \le b_1\}$ и гладкой дуги S, являющейся кривой Ляпунова и лежащей в полуплоскости $y_2 \ge 0$. Положим $\overline{G} = G \cup \partial G$. Обозначим через $A_{n\times n}(x)$, $n \ge 2$, класс квадратных матриц $D(x^T)$ элементами которых являются линейные формы с постоянными комплексными коэффициентами и таких, что выполняется равенство $D^*(x^T)D(x^T) = (x_1^2 + x_2^2)I$, где $D^*(x^T)$ - сопряженная к $D(x^T)$ матрица, $x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ транспонированный вектор x, I - единичная матрица.

Рассмотрим задачу Коши

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0\ ,\ x \in G\ , \tag{1}$$

$$U(x)\big|_S = f(x), \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $U(x) = (U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x))^T$; $n \ge 2$, здесь $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T$, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.

Система уравнений (1) представляет собой систему эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы охватывают широкий класс эллиптических систем; например, классическое уравнение Лапласа $\Delta w(x) = 0$ можно рассматривать как частный случай системы (1).

Задача Коши для системы Коши - Римана (для голоморфных функций в классической версии) является известной проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т. д. (см. [1], [2], [8]). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи для более общего класса эллиптических систем (см. [4], [5], [8]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов [11,12]. Как отмечалось в [9], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Литературы [2,6,7] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а также пути ее регуляризации.

Если функция $U(x) \in C^1(G) \cap G(\overline{G})$ является решением системы (1), то верно следующее интегральное представление [7]:

$$U(x) = \int_{\partial G} M(x, y)U(y)dS_y\,, \tag{3}$$

где

$$M(x, y) = \left(E\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t),$$

$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y границы ∂G,

$y = (y_1, y_2)$, $r = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, $E(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & \xi_2 & ..... & 0 \\ .... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & ..... & \xi_n \end{pmatrix}$-

диагональная матрица размерность $n \times n$, $u^0 = (1,1,...,1) \in R^n, n \ge 2.$

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на Q, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2 > 0$. Следуя М.М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана [3].

В работе [15,16] с помощью функции Карлемана получены оценки отклонения производных первого порядка приближённого решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы в двумерных и трёхмерных областях для уравнения Лапласа а в работе [17] в двумерных областях специального вида для бигармонического уравнения.

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши. В работе [10] при помощи функции Карлемана построена регуляризованные решение уравнения Лапласа в неограниченной области на плоскости.

Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством [13].

$$-2\pi \exp(\sigma x_2^2)\Phi_\sigma(x,y) = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_2}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{4}$$

где $\alpha = |y_1 - x_1|, \quad \alpha^2 = s, \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2, \quad u \geq 0.$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2))\left[\int_0^\infty \frac{\exp(-\sigma u^2)\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}\,udu}{u^2+r^2} - \right.$$
$$\left. -\int_0^\infty \frac{\exp(-\sigma u^2)(y_2 - x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]. \tag{5}$$

Формула (3) верна, если вместе $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ подставим функцию вида [13,14]:

$$\Phi_\sigma(y,x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g_\sigma(y,x),$$

где $g_\sigma(y,x)$ - гармоническая функция по y в R^2 включая $y = x$. Поэтому, для функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедливо следующее интегральное представление:

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x \in G, \tag{6}$$

где

$$N_\sigma(x,y) = \left(E(\Phi_\sigma(x,y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right),$$

$\Phi_\sigma(x,y)$ определяется по формуле (5).

Теорема 1. Пусть вектор-функция $U(x)$ класса $C^1(G) \cap C(\overline{G})$ является решением системы (1) и на части S границы ∂G удовлетворяет условие (2) а на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \leq M, \quad y \in Q\ . \tag{7}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le \psi_2(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \tag{8}$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \le \beta_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

где M - заданное положительное число,

$$\psi_2(\sigma, x_2) = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}\, x_2} + 1 \right), \tag{10}$$

$$\beta_1(\sigma, x_2) = c\left(\frac{3\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}\, x_2^2} \right), \ \beta_2(\sigma, x_2) = c\left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}} \right), \tag{11}$$

c - некоторая постоянная и в каждом выражение они различны.

Доказательство . Обозначим через $J_\sigma(x)$ разность

$$\begin{aligned} J_\sigma(x) &= U(x) - U_\sigma(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x, y) U(y) dS_y - \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y = \\ &= \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y + \int_Q N_\sigma(x, y) U(y) dy_1 - \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y = \int_Q N_\sigma(x, y) U(y) dy_1. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом из (7) следует

$$J_\sigma(x) = \left| \int_Q N_\sigma(x, y) U(y) dy_1 \right| \le M F_\sigma(x), \, F_\sigma(x) = \int_Q |N_\sigma(x, y)| dy_1 .$$

Утверждение оценки (8) следует из

$$F_\sigma(x) \le \psi_2(\sigma, x_2) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0 . \tag{13}$$

Докажем (13). Для доказательства неравенства (13) оценим комбинации интегралов типа

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{\partial G} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_j} U(y) dS_y, \quad n \ge 2 .$$

Положим

$$\max_Q \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = c, \ c = const . \tag{14}$$

Теперь оценим $\int_{\partial G} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_j} U(y) dS_y$ на части Q границы ∂G .

Следуя работе [13] имеем:

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1} = -\frac{e^{\sigma y_2^2 - \sigma x_2^2 - \sigma(y_1 - x_1)^2}}{2\pi} \frac{(y_1 - x_1)\cos 2\sigma y_2 (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)\sin 2\sigma y_2 (y_1 - x_1)}{r^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} = -\frac{e^{-\sigma|y_1 - x_1|^2 + \sigma y_2^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \frac{(y_2 - x_2)\cos 2\sigma y_2 (y_1 - x_1) + |y_1 - x_1| \sin 2\sigma y_2 |y_1 - x_1|}{r^2} . \tag{16}$$

Полагая в (15) $y_2 = 0$ и оценивая, имеем:

$$\int_Q \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \right| dy_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left| -\frac{1}{2\pi} \frac{(y_1 - x_1) e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2 - \sigma x_2^2}}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \right| dy_1 \le \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma x_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{-\sigma\alpha^2}}{\alpha^2 + x_2^2} d\alpha \le \frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}} \frac{1}{x_2} e^{-\sigma x_2^2}.$$

Далее, оценивая (16), получим доказательство неравенство (13), т.е.:

$$F_\sigma(x)=\int_Q\left[\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right|_{y_2=0}+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right|_{y_2=0}\right]dy_1\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}x_2}+1\right)e^{-\sigma x_2^2},\quad \sigma>0.$$

Докажем неравенство (11). Находим разность производных

$$J^i{}_\sigma(x)=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\partial G}N_\sigma(x,y)U(y)dS_y-\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y+\frac{\partial}{\partial x_i}\int_Q N_\sigma(x,y)U(y)dy_1-\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y= \tag{17}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_Q N_\sigma(x,y)U(y)dy_1,\quad i=1,2.$$

Оценивая (17) получим:

$$\left|J^i{}_\sigma(x)\right|=\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|=\left|\int_Q\frac{\partial}{\partial x_i}[N_\sigma(x,y)]U(y)dy_1\right|\le MA^i_\sigma(x),$$

$$A^i_\sigma(x)=\int_Q\left|\frac{\partial}{\partial x_i}[N_\sigma(x,y)]\right|dy_1. \tag{18}$$

Пусть $i=1$. Из (18) получим:

$$\left|J^1{}_\sigma(x)\right|\le\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1}\right|=\left|\int_Q\frac{\partial}{\partial x_1}[N_\sigma(x,y)]U(y)dy_1\right|\le MA^1_\sigma(x),\ A^1_\sigma(x)=\int_Q\left|\frac{\partial}{\partial x_1}[N_\sigma(x,y)]\right|dy_1.$$

Утверждение оценки (9) при $i=1$, следует из неравенство

$$A^1_\sigma(x)\le\beta_1(\sigma,x_2)e^{-\sigma x_2^2}\quad . \tag{19}$$

Для доказательства неравенства (19) оценим комбинации интегралов типа

$$\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_{\partial G}\sum_{j=1}^2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}\right)U(y)dS_y,\quad n\ge 2. \tag{20}$$

Так как каждые элементы матрицы $N_\sigma(x,y)$ состоят из комбинации интегралов типа

$$\int_{\partial G}\sum_{j=1}^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}U(y)dS_y,\quad n\ge 2. \tag{21}$$

Учитывая (15), (16) находим $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\displaystyle\int_Q\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}U(y)dS_y\right]$, $j=1,2$ полагая $y_2=0$ и оценивая, получим:

$$\int_Q\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right]\right|dS_y\Bigg|_{y_2=0}\le\frac{\sigma}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{|y_1-x_1|^2e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+\frac{1}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{|y_1-x_1|^2e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dy_1\le$$

$$\le\frac{\sigma}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y_1-x_1|^2e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+ \tag{22}$$

$$+\frac{1}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y_1-x_1|^2e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}\le\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right)e^{-\sigma x_2^2}.$$

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2} \right] \right| dS_y \Big|_{y_2=0} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} e^{-\sigma x_2^2} \int_Q \left[\frac{\sigma |y_1 - x_1| x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} e^{-\sigma |y_1 - x_1|^2} + \frac{|y_1 - x_1| x_2}{((y_1 - x_1)^2 + x_2^2)^2} e^{-\sigma |y_1 - x_1|^2} \right] dy_1 \leq e^{-\sigma x_2^2} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2x_2^2 \sqrt{\pi\sigma}} \right). \quad (23)$$

Далее, с учетом (22) и (23) получим:

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j} \right] \right|_{y_2=0} dy_1 \leq \left(\frac{3\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2}{x_2^2 \sqrt{\pi\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2}, \; j = 1,2. \quad (24)$$

Из (24), также учитывая (14) получим утверждение неравенство (19).

Неравенство (9) доказано при $i = 1$. Пусть $i = 2$. Из (18) получим:

$$\left| J^2{}_\sigma(x) \right| \leq \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_2} \right| = \left| \int_Q \frac{\partial}{\partial x_2} [N_\sigma(x,y)] U(y) dy_1 \right| \leq M A_\sigma^2(x), A_\sigma^2(x) = \int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_2} [N_\sigma(x,y)] \right| dy_1.$$

Утверждение неравенства (9) при $i = 2$, следует из

$$A_\sigma^2(x) \leq \beta_2(\sigma, x_2) e^{-\sigma x_2^2} \quad . \quad (25)$$

Для доказательства неравенства (25) оценим комбинации интегралов типа

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\int_Q \frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j} U(y) dS_y \right], \; j = 1,2.$$

Дифференцируя (15) и (16) по x_2, полагая $y_2 = 0$ и оценивая получим:

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1} \right] \right|_{y_2=0} dy_1 \leq \left| \int_Q \left\{ \frac{e^{-\sigma x_2^2 - \sigma(y_1 - x_1)^2}}{\pi} \left[\frac{\sigma x_2 (y_1 - x_1)}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} + \frac{x_2 (y_1 - x_1)}{((y_1 - x_1)^2 + x_2^2)^2} \right] \right\} \right| dS_y \leq$$

$$\leq \frac{\sigma e^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{|x_2| |y_1 - x_1| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} dy_1 + \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{|x_2| |y_1 - x_1| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{((y_1 - x_1)^2 + x_2^2)^2} dy_1 \leq \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma} x_2^2} \right) e^{-\sigma x_2^2}. \quad (26)$$

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2} \right] \right|_{y_2=0} dS_y = e^{-\sigma x_2^2} \left(\frac{3\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{x_2^2 \sqrt{\pi\sigma}} \right). \quad (27)$$

Из (26) и (27) получим.

$$\int_Q \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j} \right] \right|_{y_2=0} dy_1 \leq \left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{2x_2^2 \sqrt{\pi\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2}, \; j = 1,2 \quad (28)$$

Неравенства (25) доказано и следовательно доказано теорема 1.

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x), \; \lim_{\sigma \to \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2.$$

Следствие 2. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{\dfrac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$

$$U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x),\ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2$$

сходится равномерно при $\sigma \to \infty$.

Литературы

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. - Новосибирск, Наука, 1990, - 246 с.
2. Carleman T. Les Functions quasianalytiques. Paris: Gauthier- Villar, 1926. PP.116.
3. Лаврентьев М.М. О Задача Коши для уравнения Лапласа //Изв. АН СССР Сер. матем., 1956. -Том 20, выпуск 6. -С. 819-842.
4. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 195–197.
5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962. - 92 с.
6. Polkovnikov A. N., Shlapunov A. A. Construction of Carleman formulasby using mixed problems with parameter-dependent boundary conditions, Siberian Mathematical Journal, Volume 58, Number 4, p. 870-844, 2017,(in Russian).
7. Тарханов Н.Н. Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск –1980. -С. 147- 160.
8. Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. 1.ed. –Berlin: Akademie Verlag, 1995. -479 pp.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1979. -285 с.
10. Турсунов Ф.Р., Шодиев Д.С, Тухтаева Х.Х. Регуляризация решение задача Коши для уравнения Лапласа в неограниченной области. Научный вестник СамГУ, №1, ст.34-39, 2021г
11. Fedchenko D. P., Shlapunov A. A. On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions // Complex Variables, Elliptic Equ. 2013. V. 58, N 11. P. 1591–1614.
12. Fedchenko D. P., Shlapunov A. A. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions // Complex Variables, Elliptic Equ. 2014. V. 59, N 5. P. 651–679.
13. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши //Математические заметки , 2008. -Том 83, выпуск 5.-С. 763-778.
14. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы //Сибирский математический журнал, 2002. -Том 43.- № 1. -С 228-239.
15. Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Уфимский математический журнал. Том 11. №4. 2019, стр. 92-106.
16. Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021, №2, С. 56-73.
17. Shodiyev D. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2022, 15(2), 199–213.