ISNN:2181-1296

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 1/2 (137)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC JOURNAL**

2023-yil, 1-son (137/2) **ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI**

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d., professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.d., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

ANIQ FANLAR

SH.A.ALIMOV	- O‘zFA akademigi
S.N.LAKAYEV	- O‘zFA akademigi (SamDU)
M.M.MIRSAIDOV	- O‘zFA akademigi
A.S.SOLEEV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.IKROMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
B.X.XO‘JAYAROV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.G.YAGOLA	- f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I.I.JUMANOV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
X.X.XUDOYNAZAROV	- t.f.d., professor (SamDU)
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya
L.SABIROV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
A.JUMABOYEV	- f.-m.f .d., professor (SamDU)
N.N.NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
O.Q.QUVONDIQOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.RAXMATULLAYEV	- f.-m.f .d., professor
A.SH.YARMUXAMEDOV	- f.-m.f .n. (SamDU)
X.S.XAYDAROV	- f.-m.f .n., dotsent (SamDU)

TABIY FANLAR

M.X.ASHUROV	- O‘zFA akademigi
N.B. FERAPONTOV	- k.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
SH. M. TUGIZOV	- professor, Koliforniya universiteti, AQSh
H. I. AKBAROV	- k.f.d., professor (O'zMU)
E. A. ABDURAXMONOV	- k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV	- k.f.d., professor (SamDU)
L. A. BULAVIN	- Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
X. Q. XAYDAROV	- b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV	- b.f.d., professor (SamDU)
Sh. T. XOLIQULOV	- g.f.d., professor (SamDU)
S. B. ABBASOV	- g.f.d., professor (SamDU)
Q. S. YARASHEV	- g.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK	- Seul univeriteti professori, Koreya
D.B.XURSANOV	- g.f.f.d., dotsent (SamDU)
M. S. QUZIYEV	- b.f.f.d., dotsent (SamDU)

Obuna indeksi – yakka tartibdagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

Б.Х.Хужаёров, А.И.Усмонов, Ф.Б.Холлиев *Анализ переноса вещества в пористой среде на основе диффузионного уравнения с много-членными дробными производными по времени*.....	2-8
Жуманов И.И., Сафаров Р.А. *Идентификации микрообъектов на основе использования текстурных и геометрических особенностей изображений*.....	9-18
Tashmatova R.V., Ruziyev I.X., Bebitova K.E. *Kimyo darslarida didaktik o'yinlardan foydalanish haqida mulohazalar*.....	19-23
Жуманов И.И., Холмонов С.М. *Оптимизация прогнозирования нестационарных объектов в условиях большой параметрической неопределенности*	24-33
Safarov T.N. *Uch o'lchovli affin fazosidagi geometriyalar*.....	34-39
Хасанов Т.Г. *Интегрирование нагруженного уравнения кортевега-де фриза с источником в случае движущихся собственных значений в классе быстроубывающих функций*.....	40-50
Nazarov F.M., Eshtemirov B.Sh., Saydullayev Q.Sh. *Microscopic and macroscopic flow models of traffic management*.....	51-58
Tursunov F., Dong Qiu *Zol-gel usulida SiO_2 mikrosferik zarrachalarning sintezi*.....	59-62
Турсунов Ф.Р., Рузикулов Ф.Ф. *Регуляризация задачи коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области*	63-69
Trobov X.T., Atavullayeva Sh.Sh., Karimov X.R., Tursunova G.X., Djurayeva R.A. *Polimer gellarda reagentsiz usulda elektrolitlar aralashmalarini ajratish*.....	70-75
Турдиев Х.Х., Болтаев А.А. *Прямая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в вязкоупругой анизотропной среде*.....	76-84
Begimkulova Sh.A., Mirzayev Sh.E., Hasanov R., Rajabova M., Ivanes A., Nasimov A.M. *Study of adsorption properties OF Mg^{2+} modified Li - Mn spinel*	85-89
Qurbonov Sh.B., Abdiyeva Z.A. *Viloyat ma'muriy markazlarini iqtisodiy geografik o'rganishning ba'zi bir masalalari*.....	90-96
Arziqulov E.U., Urolov Sh.Z., Z. Shaymardanov Sh., Jalolov R.R., Rustamova B.N. *Rux oksidi nanokristallari strukturasi va optik xossalariga yuqori haroratli qizdirishning ta'siri*.....	97-102
Rustamova N., Amriddinova D. *Isolation, identification and optimization of exopolysaccharide-based bioflocculant synthesis by soil bacteria bacillus atrophaeus NR-12*.....	103-109
Ishankulov T., Mannonov M., Mukarramxujayeva N. *Bir jinsli bo'lmagan polianalitik tenglama yechimini birlik doira chegarasining qismidan davom ettirish*.....	110-115
Олимов Х.К., Канокова Ш.З., Шодмонов М.З., Кахорова А.Н. *Анализ распределений поперечных импульсов заряжённых частиц в Pb+Pb Столкновениях при $(s_{nn})^{1/2}$=2.76 ТэВ*.....	116-120
Xudoyberdiyeva I.A. *Navoiy viloyatida chorvachilik tarmoqlarini hududiy tashkil etishning iqtisodiy-geografik jihatlari*	121-125
Qurbonov H., Bozorova O'. *Qayta tiklanish jarayonining kutish joylari soni cheklangan xizmat ko'rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotini o'rganishga tadbiqi*.....	126-131

УДК 517.957 **DOI:https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v1.1.1858**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩИХСЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Т.Г.Хасанов

Ургенчский государственный университет

Аннотация. Метод обратной задачи рассеяния применяется для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в случае движущихся собственных значений. Выводится эволюция данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля, коэффициент которого является решением нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в случае движущихся собственных значений. Кроме того предлагается алгоритм построении точных решений нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза. Приведены примеры, иллюстрирующий изложенный алгоритм.

Ключевые слова: Уравнения Кортевега-де Фриза, данных рассеяния, оператора Штурма-Лиувилля, интегральное уравнения Гельфанда- Левитана- Марченко.

Yuklangan hadli Korteveg-de Friz tenglamasini harakatlanuvchi manba bilan tez kamayuvchi funksiyalar sinfida integrallash

Annotatsiya. Tez kamayuvchi funksiyalar sinfida harakatlanuvchi manba va yuklangan hadli Korteveg-de Friz tenglamasini integrallashda sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalanilgan. Shturm-Liuvill operatorining koeffisiyenti harakatlanuvchi manbali va yuklangan hadli Korteveg-de Friz tenglamasining yechimi bo'lganda uning sochilish nazariyasining berilganlarini evolyutsiyasi keltirib chiqarilgan. Bundan tashqari, yuklangan Korteveg-de Fries tenglamasining aniq yechimlarini qurish algoritmi taklif qilingan. Bayon qilingan algoritm yordamida misol ishlab ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Korteveg-de Friz tenglamasi, sochilish nazariyasi, Shturm-Liuvill operatori, Gelfand-Levitan-Marchenko integral tenglamasi.

Integration of the Loaded Korteweg-de Vries Equation with a Source in the Case of Moving Eigenvalues in the Class of Rapidly Decreasing Functions

Annotation. The inverse scattering method is used to integrate the loaded Korteweg-de Vries equation with a source in the case of moving eigenvalues. The evolution of the scattering data of the Sturm-Liouville operator is derived, the coefficient of which is the solution of the loaded Korteweg-de Vries equation with a source in the case of moving eigenvalues. In addition, an algorithm is proposed for constructing exact solutions of the loaded Korteweg-de Vries equation. Examples illustrating the stated algorithm are given.

Key words: Korteweg-de Vries equations, scattering data, Sturm-Liouville operator, Gelfand-Levitan-Marchenko integral equations.

Введение. Обратные спектральные задачи играют значительную роль интегрировании некоторых важных эволюционных уравнений математической физики. Важных прорыв был сделан в октябре 1967 года с появлением статьи Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1], где было показано, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx},\ q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x),\ x \in R,\ t > 0,$$

можно представить как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений, одно из которых оказалось уравнением Штурма-Лиувилля

$$H\psi \equiv -\psi''(x,k,t) + q(x,t)\psi(x,k,t) = k^2\psi(x,k,t),\ x \in R.$$

Было отмечено, что если потенциал в этом уравнении меняется во времени согласно КдФ, то $\psi = \psi(x,k,t)$ удовлетворяет ещё одному линейному уравнению, а именно,

$$\psi_t = -4\psi'''_{xxx} + 6q(x,t)\psi'_x + 3q_x(x,t)\psi .$$

С учётом данного обстоятельства, в [1] предложена процедура построения точных решений уравнения КдФ сведением к обратной задачи теории рассеяния. Обратная задача теория рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Фаддеева [2], Марченко [3], Левитана [4], и др. В статье [5] Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщил уравнение КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3], [4], [6]-[12].

В современной научной литературе большое внимание привлекают интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с источниками. Они имеют важные приложения (см. [13]-[18]) в физике плазмы, гидродинамике, физике твердого тела и т.д. Например, уравнение КдФ, которое содержит источник, рассматривалась в работе [14]. Такими уравнениями можно описать взаимодействие длинных и коротких капиллярно-гравитационных волн [15]. Кроме того решения нелинейных уравнений с источниками в классе периодических функций для различных задач изучались в работах [19]-[21].

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Среде работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует отметить [22].

В данной работе изучается нагруженное уравнение КдФ с источником вида:

$$u_t + \beta(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + \gamma(t)u(x_1,t)u_x = 2\sum_{m=1}^{N}\xi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right),$$

$$-\varphi''_m + u(x,t)\varphi_m = \lambda_m(t)\varphi_m,\ \ m=\overline{1,\ N} \qquad (1)$$

$$-\psi''_m + u(x,t)\psi_m = \lambda_m(t)\psi_m,\ \ m=\overline{1,\ N}$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$- заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0, x_1 \in R$, $\xi_m,\ m=1,2,...,N$ заданное вещественные число. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in R \qquad (2)$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующими свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty ; \qquad (3)$$

2) оператор $L(0) := -\dfrac{d^2}{dx^2} + u_0(x),\ x \in R$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задачи $\varphi_m(x,t)$ является собственной функцией уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом $u(x,t)$, а $\psi_m(x,t)$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, причём

$$W\left\{\varphi_m(x,t),\psi_m(x,t)\right\} = \varphi_m(x,t)\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x} - \psi_m(x,t)\frac{\partial\varphi_m(x,t)}{\partial x} = \omega_m(t) \neq 0, m=\overline{1,N} \qquad (4)$$

где $\omega_m(t)$ изначально заданные непрерывные функции от t удовлетворяющие условию

$$\int_0^t \omega_m(\tau)d\tau < -\lambda_m(0),\ \ m=1,2,...,N$$

При всех неотрицательных значениях t.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам в точке $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|\right)\left(|u(x,t)|+\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx<\infty,\quad j=1,2,3,\ldots. \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\psi_m(x,t),\ x\in R,\ t>0,\ m=\overline{1,N}$ задачи (1)-(5), с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля: $L(t):=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t),\ x\in R,\ t>0$.

Необходимые сведения

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$L(0)y:=-y''+u_0(x)y=k^2y,\quad x\in R \tag{6}$$

где потенциал $u_0(x)$ удовлетворяет условию (3). В этом пункте будут приведены необходимые сведения для дальнейшего изложения касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения (6). Обозначим решения Йоста через $f(x,k)$ и $g(x,k)$, в уравнении (6) с асимптотиками

$$f(x,k)=e^{ikx}+o(1),\quad x\to\infty,\ (\operatorname{Im}k=0);\quad g(x,k)=e^{-ikx}+o(1),\quad x\to-\infty,\ (\operatorname{Im}k=0). \tag{7}$$

При выполнении условии (3) такие решения существуют, определяются асимптотиками (7) однозначно. Кроме того, для решений $f(x,k),\ g(x,k)$ справедливы представления

$$f(x,k)=e^{ikx}+\int_x^{\infty}K^+(x,z)e^{ikz}dz,\quad g(x,k)=e^{-ikx}+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,z)e^{-ikz}dz, \tag{8}$$

ядра $K^+(x,z),\ K^-(x,z)$ которые являются вещественными функциями, связанные с потенциалом $u_0(x)$ соотношениями:

$$u_0(x)=\mp2\frac{d}{dx}K^{\pm}(x,x). \tag{9}$$

При вещественных k пары функций $\{f(x,k),\ f(x,-k)\}$ и $\{g(x,k),g(x,-k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (6), поэтому

$$f(x,k)=b(k)g(x,k)+a(k)g(x,-k),\quad g(x,k)=-b(-k)f(x,k)+a(k)f(x,-k). \tag{10}$$

Функции $r^+(k)=-\frac{b(-k)}{a(k)},\ r^-(k)=\frac{b(k)}{a(k)}$, называются коэффициентами отражения (правым и левым соответственно). Коэффициенты $a(k),\ b(k)$ и $r^+(k)$ обладают следующими свойствами (см. [4] с. 121):

A. При вещественных $k\neq0$

$$a(-k)=\overline{a(k)},\quad b(-k)=\overline{b(k)},\quad |a(k)|^2=1+|b(k)|^2; \tag{11}$$

$$\begin{gathered}a(k)=\frac{1}{2ik}W\{g(x,k),f(x,k)\},\ b(k)=\frac{1}{2ik}W\{f(x,k),g(x,-k)\},\\ a(k)=1+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k}\right),\ b(k)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k}\right),\ k\to\pm\infty;\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$W\{f(x,k),g(x,k)\}\equiv f(x,k)g'(x,k)-f'(x,k)g(x,k).$$

B. Функция $a(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im}k>0$ и там имеют конечное число нулей $k_n=i\chi_n,\ (\chi_n>0),\ n=1,2,3,\ldots,N$, эти нули являются простыми, причем $\lambda_n=-\chi_n^2$ собственное значение оператора $L(0)$. Кроме того, имеет место соотношение

$$g(x,i\chi_j)=B_jf(x,i\chi_j),\ j=1,2,\ldots,N; \tag{13}$$

C. При вещественных $k \neq 0$ функция $r^+(k)$ непрерывна,

$$\overline{r^+(k)} = r^+(-k),\ \left|r^+(k)\right| < 1,\ r^+(k) = o\left(\frac{1}{k}\right),\ |k| \to \infty,\ k^2\left[1 - \left|r^+(k)\right|^2\right]^{-1} = O(1),\ |k| \to 0;$$

D. Функция $k(a(k)-1)$, где $a(k)$ определена формулой

$$a(k) = \prod_{j=1}^{N} \frac{k - i\chi_j}{k + i\chi_j} \exp\left\{-\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(1 - \left|r^+(\xi)\right|^2\right)}{\xi - k} d\xi\right\},\ \operatorname{Im} k > 0,$$

непрерывна и ограничена в $\operatorname{Im} k \geq 0$ и

$$\left(a(k)\right)^{-1} = O(1),\ |k| \to 0,\ \operatorname{Im} k \geq 0,\ \lim_{k \to 0} ka(k)\left(r^+(k) + 1\right) = 0,\ \operatorname{Im} k = 0;$$

E. Функции

$$R^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{\pm}(k) e^{\pm ikx} dk$$

при каждом $a > -\infty$ удовлетворяют условию

$$\left(1 + |x|\right)\left|R^{\pm}(\pm x)\right| \in L^1(a, \infty).$$

Набор $\left\{r^+(k), \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_N, B_1, B_2, \ldots, B_N\right\}$ называется данными рассеяния для оператора $L(0)$. Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u_0(x)$, а обратная в восстановлении по данным рассеяния потенциала $u_0(x)$ уравнения (6).

Ядро $K^+(x, y)$ в представлении (8) является решением интегрального уравнения Гельфанда- Левитана- Марченко

$$K^+(x, y) + F^+(x + y) + \int_x^{\infty} K^+(x, z) F^+(z + y) dz = 0,\ \ (y > x) \tag{14}$$

где

$$F^+(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^+ e^{-\chi_j x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k) e^{ikx} dk, \tag{15}$$

$$\alpha_j^+ = \frac{B_j}{i\left.\dfrac{da(z)}{dz}\right|_{z = i\chi_j}},$$

а $a(z)$- аналитическое продолжение функции $a(k)$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$.

Лемма 1. Пусть функции $y(x, \lambda)$ и $z(x, \mu)$ соответственно являются решениями

$$Ly(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \qquad Lz(x, \mu) = \mu z(x, \lambda).$$

Тогда справедливо равенство:

$$\frac{d}{dx} W\left\{y(x, \lambda), z(x, \mu)\right\} = \left(\lambda - \mu\right) y(x, \lambda) z(x, \mu).$$

Доказательство данной леммы исходит из простых расчетов.

Справедливо следующая теорема (см. [4], с. 231).

Теорема 1. Задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал $u_0(x)$.

Эволюция данных рассеяния

Рассмотрим следующее уравнение

$$u_t + \beta(t) u(x_0, t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) = G(x, t), \tag{16}$$

где

$$G(x,t)=-\gamma(t)u(x_1,t)u_x+2\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right). \tag{17}$$

Для уравнения (16) будем искать пару Лакса [5] в виде

$$-\phi_{xx}+\left(u(x,t)-k^2\right)\phi=0, \tag{18}$$

$$\phi_t=\beta(t)u(x_0,t)\left(-u_x+4ik^3\right)\phi+\beta(t)u(x_0,t)\left(2u+4k^2\right)\phi_x+F(x,t). \tag{19}$$

Используя тождество $\phi_{xxt}=\phi_{txx}$, и учитывая равенств (16)-(19), получим

$$-F_{xx}+\left(u(x,t)-k^2\right)F=-G(x,t)\phi. \tag{20}$$

Положив $\phi(x,t)=g(x,k,t)$, ищем решение уравнения (20) в виде

$$F(x,t)=B(x)g(x,k,t)+C(x)g(x,-k,t).$$

Тогда для определения $B(x)$ и $C(x)$ получим следующую систему уравнений

$$B'(x)g(x,k,t)+C'(x)g(x,-k,t)=0,\ \ B'(x)g'(x,k,t)+C'(x)g'(x,-k,t)=G(x,t)g(x,k,t)$$

решение которой имеет вид

$$B(x)=-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g(s,k,t)g(s,-k,t)G(s,t)ds,\ \ C(x)=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g^2(s,k,t)G(s,t)ds.$$

Следовательно, используя выражение (17), уравнение (19) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial t}=\beta(t)u(x_0,t)\left(-u_x+4ik^3\right)g(x,k,t)+\beta(t)u(x_0,t)\left(2u+k^2\right)\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\gamma(t)u(x_1,t)g(x,k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds-$$
$$-\frac{\gamma(t)u(x_1,t)\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds+$$
$$-\frac{2g(x,k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds+$$
$$+\frac{2\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\int_{-\infty}^{x}g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds. \tag{21}$$

Переходя в равенстве (21) к пределу $x\to\infty$, в силу (11), (12) и асимптотике решения Йоста, выводим

$$\frac{da(k,t)}{dt}=\frac{\gamma(t)u(x_1,t)a(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds+$$
$$+\frac{\gamma(t)u(x_1,t)b(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds-$$
$$-\frac{2a(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds-$$
$$-\frac{2b(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds, \tag{22}$$
$$\frac{db(-k,t)}{dt}=8ik^3\beta(t)u(x_0,t)b(-k,t)+$$
$$+\frac{\gamma(t)u(x_1,t)b(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds+$$

$$+\frac{\gamma(t)u(x_1,t)a(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds-$$

$$-\frac{2b(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds-$$

$$-\frac{2a(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds. \qquad (23)$$

Умножая (23) на $a(k,t)$ и вычитая из него равенство (22) умноженное на $b(-k,t)$, согласно (11), получим

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=8ik^3\beta(t)u(x_0,t)r^+(k,t)-\frac{\gamma(t)u(x_1,t)}{2ika^2(k,t)}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds-$$

$$\frac{1}{2ika^2(k,t)}\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)\sum_{n=1}^{N}\xi_n\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_n\psi_n\right)ds\,. \qquad (24)$$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2. Справедливы следующие равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds=4k^2a(k,t)b(-k,t)\,, \qquad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)\sum_{n=1}^{N}\xi_n\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_n\psi_n\right)ds=-ik^2a(k,t)b(-k,t)\sum_{n=1}^{N}\frac{\xi_n\omega_n}{k_n\left(k^2-k_n^2\right)}. \qquad (26)$$

Доказательство. Сперва докажем равенство (25):

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds=g^2(s,k,t)u(s,t)\Big|_{s=-\infty}^{s=+\infty}-2\int_{-\infty}^{\infty}\left(g''(s,k,t)+k^2g(s,k,t)\right)g'(s,k,t)ds=$$

$$=-2\int_{-\infty}^{\infty}g'(s,k,t)g''(s,k,t)ds-2k^2\int_{-\infty}^{\infty}g(s,k,t)g'(s,k,t)ds=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\left(g'^2(s,k,t)\right)'ds-k^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(g^2(s,k,t)\right)'ds=$$

$$=-g'^2(s,k,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-k^2\,g^2(s,k,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}=k^2a^2(k,t)e^{-2ikx}+2k^2a(k,t)b(-k,t)+$$

$$+k^2b^2(-k,t)e^{2ikx}-k^2e^{-2ikx}-k^2a^2(k,t)e^{-2ikx}+2k^2a(k,t)b(-k,t)-$$

$$-k^2b^2(-k,t)e^{2ikx}+k^2e^{-2ikx}=4k^2a(k,t)b(-k,t)\,.$$

Аналогично используя равенство

$$2(k^2-k_n^2)\int_{-\infty}^{\infty}g^2(x,k,t)\xi_n\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_n\psi_n\right)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\xi_n\Big(\left[W\left\{g(x,k,t),\varphi_n(x)\right\}W\left\{g(x,k,t),\psi_n(x)\right\}\right]_{-R}^{R}+$$

$$+(k^2-k_n^2)g^2(x,k,t)\varphi_n(x)\psi_n(x)\Big|_{-R}^{R}\Big),$$

доказывается вторая часть леммы.

А теперь займемся эволюцией собственных значений. Для этого будем рассматривать кососимметрический оператор вместе с оператором L.

Положим

$$A=\beta(t)u(x_0,t)\left(4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)\right).$$

Легко заметить, что

$$[L,A]\equiv LA-AL=-P(u(x_0,t))(u_{xxx}-6uu_x). \tag{27}$$

Оператор L зависит от времени t как параметр, так что

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{28}$$

Сравнивая формулы (27) и (28) с (1), убедимся, что первое из уравнений (1) тождественно операторному соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,A]+G. \tag{29}$$

Пусть теперь, $g_n(x,t)=g(x,i\chi_n(t),t)$ нормированная собственная функция оператора L соответствующая собственному значению $\lambda_n(t)=\left(i\chi_n(t)\right)^2$, $n=1,2,...,N$, т.е.

$$Lg_n=\lambda_n g_n.$$

Продифференцируем это равенство по t, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t}g_n+L\frac{\partial g_n}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}g_n+\frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n, \tag{30}$$

Отсюда и из (29), получим

$$[L,A]g_n+L\frac{\partial g_n}{\partial t}+Gg_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}g_n+\frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n,$$

или

$$LAg_n-\lambda_nAg_n+L\frac{\partial g_n}{\partial t}-\frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n+Gg_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}g_n.$$

Таким образом

$$\left(L-\lambda_n\right)\left(Ag_n+\frac{\partial g_n}{\partial t}\right)+Gg_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}g_n.$$

Умножая это равенство на g_n и интегрируя по x на всей оси, учитывая нормированность g_n, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_n\left(L-\lambda_n\right)\left(Ag_n+\frac{\partial g_n}{\partial t}\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}Gg_n^2dx=\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\ .$$

Так как L самосопряженный оператор, первый интеграл равен нулю, поэтому

$$\frac{d\lambda_n}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}Gg_n^2dx,\ \ n=1,2,...,N.$$

Учитывая равенства $\lambda_n(t)=-\chi_n^2(t)$ последнее тождество можно переписать в виде:

$$\frac{d\chi_n}{dt}=-\frac{1}{2\chi_n}\int_{-\infty}^{\infty}Gg_n^2dx,\ \ n=1,2,...,N. \tag{31}$$

Лемма 3. Если G определяется равенством (17), то справедливы следующие тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty}Gg_n^2dx=\xi_n\omega_n,\ \ n=1,2,...,N. \tag{32}$$

Доказательство. Для доказательства (32), сперва запишем его в следующем виде,

$$\int_{-\infty}^{\infty}Gg_n^2dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)u(x_1,t)u_xg_n^2dx+2\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m\psi_m\right)g_n^2dx. \tag{33}$$

Сперва вычислим первой интеграл в провой части этого равенство:

$$-\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}u_x g_n^2 dx=-\gamma(t)u(x_1,t)ug_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty}+\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}2ug_n g_n' dx=$$

$$=2\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}ug_n g_n' dx.$$

Отсюда, используя тождество $L_n(t)g_n\equiv -g_n''+ug_n=k_n^2 g_n$, имеем

$$2\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}(k_n{}^2 g_n+g_n'')g_n' dx=2\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(k_n^2 g_n g_g'+g_n'' g_n'\right)dx.$$

Интегрируя полученное выражение, имеем следующее:

$$2\gamma(t)u(x_1,t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(k_n^2 g_n g_g'+g_n'' g_n'\right)dx=\gamma(t)u(x_1,t)k_n^2 g_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty}-\gamma(t)u(x_1,t)g_n'^2\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Теперь изучим второй интеграл правой части (33) в следующих случаях:

1) Если $m\neq n$, то справедливо следующее соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m\psi_m\right)g_n^2 dx=0.$$

2) Если $m=n$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_n\psi_n)g_n^2 dx=\xi_n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_n g_n W\{g_n,\psi_n\}+\psi_n g_n W\{g_n,\varphi_n\}\right)dx=$$

$$=\xi_n\int_{-\infty}^{\infty}g_n^2 W\{\varphi_n,\psi_n\}dx=\xi_n\omega_n(t).$$

Лемма 3 доказана.

Далее, используя лемму 3, имеем

$$\frac{d\chi_n}{dt}=-\frac{\xi_n\omega_n}{2\chi_n},\ n=1,2,...,N. \tag{34}$$

Отсюда получим, что

$$\chi_n^2(t)=\chi_n^2(0)-\int_0^t\omega_n(\tau)d\tau,$$

т.е.

$$\lambda_n(t)=\lambda_n(0)+\int_0^t\omega_n(\tau)d\tau.$$

Поэтому собственные значения $\lambda_n(t)$ оператора $L(t)$ является непрерывной функцией от параметра t. Используя леммы 2 и 3 из равенство (24), получим

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3\beta(t)u(x_0,t)-2ik\gamma(t)u(x_1,t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{ik\xi_n\omega_n}{\chi_n\left(k^2+\chi_n^2\right)}\right)r^+(k,t). \tag{35}$$

Теперь перейдем к нахождению эволюции нормированных чисел B_n, $n=1,2,...,N$, соответствующий собственным значениям λ_n, $n=1,2,...,N$. Для этого перепишем равенство (21) в следующем виде

$$\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial t}=\beta(t)u(x_0,t)\left(-u_x+4ik^3\right)g+\beta(t)u(x_0,t)\left(2u(x,t)+4k^2\right)\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\gamma(t)u(x_1,t)g(x,k,t)}{2ik}\Big[g(x,k,t)\overline{g(x,k,t)}u(x,t)-$$

$$-\int_{-\infty}^{x} u(s,t)\left(g'(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}+g(s,k,t)\overline{g}'(x,k,t)\right)ds\Bigg]-$$

$$-\frac{\gamma(t)u(x_1,t)\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\left[g^2(x,k,t)u(x,t)-\int_{-\infty}^{x} 2g'(s,k,t)g(s,k,t)u(s,t)ds\right]-$$

$$-\frac{4g(x,k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds+$$

$$+\frac{4\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds.$$

Используя равенство (13), полагая $k=k_n$ и учитывая асимптотику решения Йоста при $x\to+\infty$, а также приравнивая коэффициенты $e^{-\chi_n x}$, находим аналог уравнений Гарднера-Грина-Крускала-Миуры

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t)+2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t)+\frac{i\xi_n\eta_n\omega_n}{2\chi_n}\right)B_n(t),\ n=1,2,3,...,N. \quad (36)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если функции $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\ \psi_m(x,t),\ m=\overline{1,N},\ x\in R,\ t>0$ являются решениями задач (1)-(5), то данные рассеяния $\left\{r^+(k,t),\lambda_n(t),B_n(t),\ n=\overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям (34), (35) и (36).

Замечание 1. Рассмотрим ядро интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко

$$F^+(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^+(t)e^{-\chi_j x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k,t)e^{ikx}dk$$

с данными рассеяниями из теоремы 2. Тогда данные $\left\{r^+(k,t),\chi_1(t),...,\chi_N(t),B_1(t),...,B_n(t)\right\}$ удовлетворяют условиям A-E. Следовательно, согласно теореме 1, потенциал $u(x,t)$ в операторе $L(t)$ определяется однозначно.

Замечание 2. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$, и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задач (1)-(5).

Пусть задана функция $u_0(x)\left(1+|x|\right)\in L^1(R)$. Тогда решения задач (1)-(5) находится с помощью следующего алгоритма.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{r^+(k),\chi_n,B_n,n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.
- Используя теорему 2, находим данные рассеяния для $t>0$
$$\left\{r^+(k,t),\chi_n(t),B_n(t),n=\overline{1,N}\right\}.$$
- Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi_m(x,t)$ уравнения $L(t)\varphi_m(x,t):=-\varphi_m''(x,t)+u(x,t)\varphi_m(x,t)=\lambda_m\varphi_m(x,t),\ m=\overline{1,N}$, а также $\psi_m(x,t),\ x\in R,\ t>0$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, удовлетворяющее (4).

Приведем пример иллюстрирующий изложенный алгоритм.

Пример 1. Если в уравнение (1) положим $x_0 = 0,\ x_1 = \ln 2,\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = \ldots = \xi_N = 0$, тогда имеем следующую задачу

$$\begin{cases} u_t + \beta(t)u(0,t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + \gamma(t)u(\ln 2,t)u_x = 2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1\psi_1\right) \\ -\varphi_1''(x,t) + u(x,t)\varphi_1(x,t) = \lambda(t)\varphi_1(x,t) \\ -\psi_1''(x,t) + u(x,t)\psi_1(x,t) = \lambda(t)\psi_1(x,t) \end{cases}$$

$$u(x,0) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x},\ x \in R;\ \omega_1(t) = \frac{\cos t}{2},$$

где

$$\beta(t) = -\frac{\operatorname{ch}^2 2t}{16\chi_1^2(t)},\quad \gamma(t) = \frac{\left(4\chi_1 - i\eta_1\cos t\right)\operatorname{ch}^2\left(\ln\dfrac{2^{\chi_1(t)}}{e^{2t}}\right)}{16\chi_1^3(t)}.$$

Не трудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda_1(0) = \left(i\chi_1(0)\right)^2 = -1,\ r^+(k,0) = 0,\ B_1(0) = 1.$$

В силу теоремы 2, имеем

$$\lambda_1(t) = -1 + \frac{1}{2}\sin t,\ r^+(k,t) = 0,\ B_1(t) = e^{2\mu(t)},$$

где

$$\mu(t) = 8\int_0^t \beta(\tau)u(0,\tau)d\tau + 2\int_0^t \gamma(\tau)u(\ln 2,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{i\eta_1\omega_1}{2\chi_1}dt.$$

Подставляя эти данные в формуле (15) найдем ядро

$$F_+(x,t) = 2e^{-x+2\mu(t)}$$

интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y,t) + 2e^{\mu(t)}\cdot e^{-(x+y)} + 2e^{\mu(t)}\cdot e^{-y}\int_x^\infty K_+(x,s,t)e^{-s}ds = 0,$$

получим

$$K_+(x,y,t) = -\frac{2e^{2\mu(t)}e^{-(x+y)}}{1+e^{2\mu(t)}e^{-2x}}.$$

Откуда и находим решение задачи Коши

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x,t) = -\frac{2\chi_1^2(t)}{\operatorname{ch}^2\left(\chi_1(t)x - 2t\right)} = -2\frac{1-\dfrac{1}{2}\sin t}{\operatorname{ch}^2\left(x\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin t} - 2t\right)},$$

$$\varphi_1(x,t) = \frac{p(t)}{\operatorname{ch}\left(\chi_1(t)x - 2t\right)},$$

$$\psi_1(x,t) = \frac{\cos t}{4\chi_1(t)p(t)}\left\{\frac{\chi_1(t)x - z(t)}{\operatorname{ch}\left(\chi_1(t)x - 2t\right)} + \operatorname{sh}\left(\chi_1(t)x - 2t\right)\right\}.$$

Здесь

$$z(t) = \frac{i}{2}\eta(t)\cos t \,.$$

Таким образом, в нагруженном уравнения КдФ с источником вида (1) в случае движущихся собственных значений, амплитуда и скорость распространения солитона, в зависимости от коэффициентов $\beta(t)$ и $\gamma(t)$, увеличится или уменьшится.

Литературы

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett.,- New York, 19, p. 1095-1098 (1967).
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера. Тр. МИАНСССР, 73, 314-336., (1964).
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Наукова думка, Киев, 1977.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля, Наука, М.: 1984.
5. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure and Appl. Math., v. 21. 467-490, (1968).
6. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. Москва «Мир» 1983.
7. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. Москва «Мир» 1983.
8. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Москва. «Мир». 1987.
9. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. Москва. «Мир». 1987.
10. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гомельтонов подход в теории солитонов. Москва. Наука. (1986).
11. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Москва. «Мир». 1988.
12. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. Москва. Ижевск. 2002.
13. Mel'nikov V.K. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. Ohys. Lett. A, 133:9 (1988), p. 493-496.
14. Mel'nikov V.K. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. Inverse problems 6:2 (1990), 233-246.
15. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundery value problem for coupled nonlinear waves. J. Phys. A: Math. Gen., 23:8 (1990), 1385-1403.
16. Claude C., Latifi A., Leon J. Nonlinear resonant scattering and plasma instability: an integrable model. J. Math. Phys., 23:12 (1991), 3321-3330.
17. Zeng Y. Ma W. X., Lin R. Integration of the solution hierarchy with self-consistent source. J. Math. Phys., 41:8 (2000), 5453-5489.
18. Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. Proceeding of the Institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan. Vol., 47, №2, 2021, p. 250-261.
19. Хасанов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членом. ТМФ., 203, №2 (2020), 192-204.
20. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).
21. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником. СибЖИМ. т. 25, №2(90). ст. 127-142. (2022).
22. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Ж. вычисл. Матем. и матем. Физ. 44, 694-716 (2004).