ISNN:2181-1296



SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 1/1 (137)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2023-yil, 1-son (137/) ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d., professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.d., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

ANIQ FANLAR

SH.A.ALIMOV - O‘zFA akademigi
S.N.LAKAYEV - O‘zFA akademigi (SamDU)
M.M.MIRSAIDOV - O‘zFA akademigi
A.S.SOLEEV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.IKROMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
B.X.XO‘JAYAROV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
A.G.YAGOLA - f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I.I.JUMANOV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
X.X.XUDOYNAZAROV - t.f.d., professor (SamDU)
ALBERTO DEL BIMBO - Florensiya universiteti professori, Italiya
L.SABIROV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
A.JUMABOYEV - f.-m.f .d., professor (SamDU)
N.N.NIZAMOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
O.Q.QUVONDIQOV - f.-m.f.d., professor (SamDU)
I.A.RAXMATULLAYEV - f.-m.f .d., professor
A.SH.YARMUXAMEDOV - f.-m.f.n., (SamDU)
X.S.XAYDAROV - f.-m.f .n., dotsent (SamDU)

TABIY FANLAR

M.X.ASHUROV - O‘zFA akademigi
N.B. FERAPONTOV - k.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
SH. M. TUGIZOV - professor, Koliforniya universiteti, AQSh
H. I. AKBAROV - k.f.d., professor (O'zMU)
E. A. ABDURAXMONOV - k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV - k.f.d., professor (SamDU)
L. A. BULAVIN - Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
X. Q. XAYDAROV - b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV - b.f.d., professor (SamDU)
Sh. T. XOLIQULOV - g.f.d., professor (SamDU)
S. B. ABBASOV - g.f.d., professor (SamDU)
Q. S. YARASHEV - g.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK - Seul univeriteti professori, Koreya
D.B.XURSANOV - g.f.f.d., dotsent (SamDU)
M. S. QUZIYEV - b.f.f.d., dotsent (SamDU)

Obuna indeksi – yakka tartibdagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

Faraz Mehmood, Soleev A. *New generalization of ostrowski-grüss like inequality on time scales*……..	2-9
Alimov A.A. *On the properties of solutions of a nonlinear filtration problem with a source and multiple nonlinearities*.....	10-17
Axatov A.R., Tojiyev M.R. *Fazo-vaqt tahlili va tayanch vektor mashinasi asosida yong'inni tezkor aniqlash algoritmi*……	18-25
Байжуманов А.А. *Проблемы минимизации специальных дизъюнктивных нормальных форм сложных конъюнкций высказываний систем нелинейных булевых уравнений*……	26-30
Djuraev A.S., Obidov A.E. *Pedagogik kadrlar malakasini oshirish uchun moslashuvchan elektron ta'lim tizimini modellashtirish*	31-39
Иванов А.К., Мухамедов А.К., Шаронов И.А., Эшбуриев Р.М. *Об измерении радиоактивности мукомольно-крупяной пищевой продукции*.....	40-46
Ishankulov A.F., Tursunova N.R., Ergasheva D.R., Khalilov K.F., Galyametdinov Y.G., Mukhamadiyev N.K. *Obtaining semiconductor CdS, CdSe AND CdSe/ZnS core/shell nanoparticles and their composites with polymers*……	47-51
Шодиев Д.С., Хайруллаев М., Махмудов Ш. *О задаче коши для бигармонического уравнения* ……	52-57
Рахматуллаев И.А., Ботиров Х.З., Курбонов А.К., Хайдаров Х.С., Ахмедова Ш.Ш, Абдирахматова М.П. *Способ регистрации слабых оптических сигналов с помощью резонаторных кювет и импульсно-периодических лазерных источников*……	58-65
Jo'rakulov I.T., Umrzoqov F.B. $Ge_2Sb_2Te_5$ *yupqa qatlam plyonkalarining solishtirma kontakt qarshiligini o'rganish*……	66-71
Ikromova D.I. *On the sharp estimates for the fourier transform of measures supported to surfaces related with* E_8 *type singularities*……	72-83
Arziqulov M.M., Shermuxamedov U.A. *Urganch shahri iqlimiy ko'rsatgichlarining o'zgarishi va atmosfera gazlari konsentratsiyasiga bog'liqligi*.....	84-88
Komilova N.K., Maxmudov B.X. *Geokriminogen vaziyat va uni tadqiq etishdagi yondashuvlar*……	89-94
Fayzullayev N.I., Tillayev S.U., Mamirzayev M.A. *Metandan nanouglerod va vodorod olish reaksiyasi tezligiga turli omillarning ta'siri*.....	95-101
Djabbarov O.R., Zaripova A.R., Sodiqova U.U. *Divergent ko'rinishdagi biologik populyatsiya sistemalarining avtomodel yechimlari asimptotikasi*....	102-106
Tursunova N.G., Musulmanov N.H., Fayzullaev N.I. *Mezog'ovakli uglerod sintezining maqbul sharoitini tanlash*……	107-116
Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д. *Численное исследование многофазной фильтрации в деформируемой пористой среде с учетом внешнего воздействия*……	117-130
Turayeva B.I., Kutliyeva G.J., Zuhritdinova N.Y., Kamolova X.F., Maxkamov A. *Tokdan ajratib olingan bakteriyalarning uzum fitopatogen mikromitsetlariga nisbatan antifungal xususiyatlari*.....	131-135
Mardonov J.A. *Uch o`lchovli fazoda laplas maydoni uchun karleman formulasi*……	136-140

УДК 517.946 **DOI: https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v1.1.1845**

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д.С.Шодиев, М.Хайруллаев, Ш.Махмудов
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
e-mail: dilshod.shodiyev.76@mail.ru

Аннотация. В статье изучается задача продолжения решения задача Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданным данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, бигармонического уравнения, функция Карлемана, регуляризация, формулы продолжения.

Bigarmonik tenglamalar uchun Koshi masalasi haqida

Annotasiya. Maqolada G soha chegarasi ∂G ning bir qismi S silliq chiziqda berilgan qiymatlariga ko'ra, bigarmonik tenglama uchun Koshi masalasi yechimini davom ettirishi qaraladi. Qaralayotgan masala, matematik fizikaning yechim boshlang'ich shartlarga uzluksiz ravishda bog'liq bo'lmgan masalalari qatoriga kiradi. Masalada yechim mavjud va biror yopiq sohada uzluksiz differensiallanuvchi, hamda Koshi shartlari aniq berilgan deb faraz qilinadi. Bu hol uchun oshkor ko'rinishda yechimni davom ettirish masalasi quriladi.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, nokorrekt masalalar, bigarmonik tenglama, Karleman funksiyasi, regulyarizasiya, davom ettirish formulalalari.

On the Cauchy problem for the biharmonic equation

Abstract. The article studies the problem of continuation of the solution of the Cauchy problem for the biharmonic equation in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G. The considered problem belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial condition. It is assumed that the solution of the problem exists and also is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy condition. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established.

Key words: Cauchy problem, ill-posed problems, biharmonic equation, Carleman function, regularization, continuation formulas.

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки вещественного евклидового пространства R^3, G - ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S -Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3>0$. $\bar{G}=G\cup\partial G$, $\partial G=S\cup T$.

В области G рассмотрим уравнение эллиптического типа высокого порядка

$$\Delta^2 U(y)=0,\ y\in G, \tag{1}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_3^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.

$$U(y_1,y_2,y_3)\big|_S = f_1(y),\ \frac{\partial U(y_1,y_2,y_3)}{\partial n}\bigg|_S = f_2(y),$$
$$\Delta U(y_1,y_2,y_3)\big|_S = f_3(y),\ \frac{\partial(\Delta U(y_1,y_2,y_3))}{\partial n}\bigg|_S = f_4(y), \tag{2}$$

где $f_i(y), i=1,2,3,4$ - заданные достаточна гладкие функции, $\frac{d}{dn}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Рассматриваемая задача (1) –(2) является некорректным задачам математической физики [6,7, 16]. Ж. Адамар [1] заметил, что решение задачи (1)-(2) неустойчиво.

В 1943 году А.Н. Тихонов [5] указал на практическую важность некорректных задач и возможность устойчивого их решения.

Понятие регуляризирующего алгоритма и связанного с ним понятие регуляризованного семейства приближенных решений и введения положительного параметра σ в зависимости от погрешности исходных данных впервые замечено М.М. Лаврентьевым [8], [9].

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши – Римана в области специального вида. Развивая идею Карлемана, Г.М. Голузин и В.И.Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А.Айзенберга [1].

Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построено в работе [3].

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней в случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в работе Ш.Я. Ярмухамедова [9,10].

В работе [12,13] с помощью функции Карлемана восстановлено по данными Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и его производные для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях, а в работе [14] для бигармонического уравнения.

В данной работе при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Конструкция функции Карлемана. Определим функцию $\Phi_\sigma(x,y)$ [см. 11] следующим равенствам

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}. \tag{3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}\,udu}{u^2+r^2} - \right.$$
$$\left. -\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right], \tag{4}$$

где $\sigma>0,\ \ u\ge 0\ \ y'=(y_1,y_2),\ x'=(x_1,x_2),\ \ r=|y-x|,\ \alpha=|y'-x'|,$

$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3.$

В работе [11] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$, определенная равенствами (3) при $\sigma>0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=F(r)+G_\sigma(x,y) \tag{5}$$

где $F(r)=\dfrac{1}{4\pi r}$, $G_\sigma(x,y)$-функция гармоническая по y в R^3 включая $y=x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma>0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [8].

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши.

Для функции $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [15].

$$\begin{aligned}U(x)=&\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\&+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x,y)}{\partial n}-L(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G\end{aligned} \tag{6}$$

где $L(x,y)=r^2\left(\dfrac{1}{4\pi r}\right)=\dfrac{r}{4\pi}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (5), тогда в интегральное представление (6), $L(x,y)$ заменяя на функции $L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\begin{aligned}U(x)=&\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\&+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G.\end{aligned} \tag{7}$$

Где

$$L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)=r^2\left\{\frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}\,udu}{u^2+r^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\cos\gamma$$

и $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G. Далее, имеем:

$$\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\left[2(y_1-x_1)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right]\cos\alpha+$$

$$+\left[2(y_2-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right]\cos\beta+$$

$$+\left[2(y_3-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\right]\cos\gamma;$$

$$\Delta L_\sigma(x,y)=\Delta\left(r^2\Phi_\sigma(x,y)\right)=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]=6\Phi_\sigma(x,y)+4(y_1-x_1)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+$$

$$+4(y_2-x_2)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3};$$

$$\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_2}\cos\beta+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_3}\cos\gamma=$$

$$=\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1^2}+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.$$

$$\left.+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}\right]\cos\alpha+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.$$

$$\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2^2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\beta+$$

$$+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3^2}+\right.$$

$$\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\gamma.$$

Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву. Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[f_1(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-f_2(y)\Delta L_\sigma(x,y)\right]dS_y+$$

$$+\int_S\left[f_3(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-f_4(y)L_\sigma(x,y)\right]dS_y,\ x\in G \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ на части S границы удовлетворяет условие (2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|+|\Delta U(y)|+\left|\frac{\partial\Delta Uu(y)}{\partial n}\right|\le M,\ y\in T, M>0. \tag{9}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливо оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\varphi(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2} \tag{10}$$

где

$$\varphi(\sigma,x_3)=\frac{9}{\sigma}+8\sigma+8\sqrt{\pi\sigma}+2\sqrt{\pi}\sigma x_3+8\sigma x_3^2+\frac{5}{2\sigma x_3}+$$
$$+12\sqrt{\sigma\pi}x_3+2\sqrt{\sigma\pi}x_3^2+\frac{11\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+46. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим через $I_\sigma(x)$ разность

$$I_\sigma(x)=U(x)-U_\sigma(x)$$

Далее, из (7) и (8) имеем:

$$I_\sigma(x)=\int_T\left[U(y)\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x,y))}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+$$
$$+\int_T\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G. \tag{12}$$

Отсюда и из неравенства (9) следует

$$|I_\sigma(x)|=\left|\int_T\left[U(y)\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x,y))}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\right.$$
$$\left.+\int_T\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right]dS_y\right|\le MN_\sigma(x),$$

где

$$N_\sigma(x)=\int_T\left[|L_\sigma(x,y)|+\left|\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|+\left|\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x,y))}{\partial n}\right|+|\Delta L_\sigma(x,y)|\right]dS_y=$$
$$=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

Чтобы показать, справедливость оценки (10) докажем следующее неравенство

$$N_\sigma(x)\le\varphi(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},\ \sigma>0 \tag{13}$$

Согласно (4) и полагая $y_3=0$ получим:

$$A_1=\int_T|L_\sigma(x,y)|dS_y\le\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{4\sigma},\quad A_2=\int_T\left|\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|dS_y\le\frac{5e^{-\sigma x_3^2}}{6\sigma};$$
$$A_3=\int_T|\Delta L_\sigma(x,y)|dS_y\le\left(\frac{11\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+12\sqrt{\sigma\pi}x_3^2+6\sqrt{\pi}\sigma x_3\right)e^{-\sigma x_3^2},$$
$$A_4=\int_T\left|\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x,y))}{\partial n}\right|dS_y\le$$
$$\le\left(\frac{4}{\sigma}+\frac{5}{2\sigma x_3}+12\sqrt{\sigma\pi}x_3+8\sigma x_3^2+2\sqrt{\pi}\sigma x_3+2\sqrt{\pi\sigma}+8\sigma+46\right)e^{-\sigma x_3^2}.$$

Для оценки интегралов область T заменили плоскостью R^2, и полученные повторные интегралы преобразовано в трехкратные по R^3, также введено сферические координаты.
С учетом полученных оценках, имеем:

$$\int_T|L_\sigma(x,y)|dS_y+\int_T\left|\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|dS_y+\int_T\left|\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x,y))}{\partial n}\right|dS_y+$$
$$+\int_T|\Delta L_\sigma(x,y)|dS_y\le\varphi(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2}, \tag{14}$$

где $\varphi(\sigma, x_3)$ определяется формулой (11).

Из (14) следует доказательство неравенство (10). **Теорема 1. доказана.**

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедлива равенство

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x).$$

Обозначим через $\bar{G}_\varepsilon$ множество

$$\bar{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in G,\ a > x_3 \geq \varepsilon,\ a = \max_T h(x_1, x_2),\ 0 < \varepsilon < a \right\}.$$

Множество $\bar{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ сходится равномерно при $\sigma \to \infty$ т.е.

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x).$$

Здесь множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории - сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Литературы

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа (Наука, М., 1978).
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск .: “Наука”. 1990. 247 с.
3. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана, ДАН СССР 298 (6), 1292–1296 (1988).
4. T. Carleman Les Functions quasi analytiques. Paris. 1926. 166 p.
5. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР 1943. Том 39 №5. с. 147-160.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: “Наука” 1995.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1974. 735 с.
8. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
9. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
10. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций заданных на куске границы. // Сибирский математический журнал. 2002. 43 №1 с. 228-239.
11. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши // Математические заметки. 2008. 83. №5. Стр. 763-778.
12. Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Уфимский математический журнал. Том 11. №4. 2019, Стр. 92-106.
13. А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика 2021, №2, С. 56-73, Россия (Scopus, IF 0,397).
14. Shodiyev D. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation**.** Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2022, 15(2), 199-213.
15. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. ОГИЗ Государственное издательство техники – теоретической литературы. Москва. 1948, Ленинград. Стр. 296.
16. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирские научное издательство, 2009. 457 с.