ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2021-yil, 5-son (129) ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.n., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

SH. A. ALIMOV	- O‘zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O‘zFA akademigi
T. RASHIDOV	- O‘zFA akademigi
M.M.MIRSAIDOV	- O‘zFA akademigi
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor
B. X. XO‘JAYAROV	- f.-m.f.d., professor
A.G.YAGOLA	- f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I. I. JUMANOV	- f.-m.f .d., professor
X. X. XUDOYNAZAROV	- t.f.d., professor
A.X.BEGMATOV	- f.-m.f .d., professor
Yu.S.VOLKOV	- f.-m.f .d., professor (Novosibirsk davlat universiteti, Rossiya)
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor
L.SABIROV	- f.-m.f .d., professor
A.JUMABOYEV	- f.-m.f .d., professor
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya
GUN-SIK PARK	- Seul univeriteti professori, Koreya

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

MATEMATIKA / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

Mamatov A.U.
Effect of source on nonhomogeneous and nonlinear thermal conductivity processes in multidimensional areas 4-12

Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.
Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка 13-22

Khamidov Sh. I.
The existence of eigenvalues of the one-particle Schrödinger operator on a lattice 23-32

Abdukhakimov S. Kh.
The existence and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators 33-43

Pardabaev M.A.
Some applications of implicit function theorem 44-52

Баракаев А.М.
Оценки осцилляторных интегралов с плоской фазой 53-59

Кабулов А.В., Сайманов И.М., Бердимуродов М.А.
Хранение данных на основе архитектуры блокчейна для интернета вещей (IOT) 60-68

Отакулов С., Собирова Г.Д., Абдиева Х.С.
Свойства множества траекторий и множества достижимости дифференциального включения с параметрами 69-76

Шарипов Х.Ф., Шарипова С.Ф.
Орбиты семейства векторных полей и гиперболический параболоид 77-81

MEXANIKA / МЕХАНИКА / MECHANICS

Dusmatov O.M., Xodjabekov M.U.
Elastik sterjen va suyuqlik bo‘g‘inli dinamik so‘ndirgichning ustuvorlik masalasi 82-95

Махмудов Ж.М., Усмонов А.И., Кулжонов Ж.Б.
Математическое моделирование задачи переноса вещества в двумерной неоднородной среде 96-105

INFORMATIKA / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

Akhatov A.R., Rashidov A.E., Nazarov F.M.
Increasing data reliability in Big data systems 106-114

Zaripova A.R., Djabbarov O.R.
Kvazichiziqli issiqlik tarqalish masalasini sonli modellashtirish 115-119

Jabbarov J.S.
Fractal structure and fractal measurement 120-122

FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

Жумабаев А., Хушвактов Х., Джуманов Л., А.Шерматов
Межмолекулярные взаимодействия молекул диметилформамида, спектры комбинационного рассеяния и неэмпирические (ab initio) расчеты 123-130

Murodov G'., Buturlimova M., Xo'jamov U., Amonov A., Nurmurodova G.
Asetaldegid vodorod ftorid kompleksining tebranish polosalari parametrlarini o'rganish 131-135

Azimov U. I.
Silindrik kvant ipdagi zarrachalarning energetik spektri va to'lqin funksiyasi 136-138

Арзикулов Э. У., Салахитдинов Ф. А., Сражев С.Н, Ташбоев М. Д.
Колебательные спектры монокристаллов кремния ионно имплантированного марганцем 139-142

Эшкабилов Н.Б., Хайдаров Ш.Р.
Ионизация высоковозбуждённых атомов электрическим полем 143-152

Базарбаев Н.Н., Бердиева М.М., Муминов И.Т., Сиддиков А.Б., Тухтаев У.У., Умирзаков Э.А.
Активности космогенного ^{7}Be в кронах декоративных деревьев 153-157

Каримов Р.Г., Жураев Б.Ш., Турниязов Р.К.
Изучение рассеянного звездного скопления Ocism 67 158-161

Солиев Т.И., Музафаров А.М., Бадалов К.А.
Исследование факторов нарушений радиоактивного равновесия между радионуклидами цепочки распада Урана 162-167

Мухамедов Г.И., Усаров Дж.Э., Кувандиков Э.О.
Синергетический подход к изучению нелинейных электрических цепей на примере аттракторов 168-171

Arziqulov E. U., Axrorov S. Q., Xasanov X., Eshmamatov S. Q., Tashboev M.D., Mamatqulov N., Quvondiqov Sh.
Havo-propan aralashmasining tovushdan tez oqimi alangasida po'latni eritib olingan materialning issiqlik o'tkazuvchanligi 172-177

Holikulov U., Jumabaev A., Khudaykulov B., Sayfinov R.
Study of the molecular structure of valine by quantum-chemical calculations 178-184

Khudaykulov B., Absanov A., Holikulov U., Iltazarov B.
Study of formamide - water complexes with raman spectroscopy and theoretical calculations 185-191

Эшбуриев Р.М., Эрназаров З.И., Абсанов А., Сайфиев Ш.
Процессы мицелообразования и природа гидрофобного взаимодействия в водных растворах пав 192-198

Mualliflarga

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

B.J.Kadirkulov[1], M.A.Jalilov[2]
[1]Ташкентский государственный университет востоковедения,
[2]Ферганский государственный университет
kadirkulovbj@gmail.com, alimuhammad9978@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости одной нелокальной обратной задачи с интегро-дифференциальным условием сопряжение для уравнения смешанного типа четвертого порядка с дробным оператором Капуто. При определенных условиях на заданные параметры и функции, доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи. Приведен пример, показывающий, что при нарушении этих условий данная задача будет иметь нетривиальное решение. В работе также установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная задача, обратная задача, функция Миттаг-Леффлера, оператор Капуто.

Kasr tartibli operator qatnashgan aralash tipdagi tenglama uchun qo’yilgan teskari masala haqida

Annotasiya. Ushbu ish kasr tartibli Kaputo operatori bilan to'rtinchi darajali aralash turdagi tenglama uchun integro-differentsial shartli nolokal teskari masalaning yechimini topishni o'rganishga bag'ishlangan. Berilgan parametrlar va funktsiyalar ma'lum bir shartlarni qanoatlantirganda qo'yilgan masala yechimining mavjudligi va yagonaligiga doir teoremalar isbotlangan. Ushbu shartlar bajarilmagan holatda masalaning notrivial yechimga ega bo'lishini ko'rsatadigan misol keltirilgan. Shuningdek, ko'rib chiqilayotgan masala yechimining nolokal shartga nisbatan turg’unligi ham ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: aralash tipdagi tenglama, nolokal masala, teskari masala, Mittag-Leffler funktsiyasi, Kaputo operatori.

An inverse problem for a mixed-type equation with fractional operator

Abstract. In the work, we study the solvability questions for a nonlocal inverse problem with an integro-differential conjugation condition for a fourth-order mixed-type equation with a fractional Caputo operator. In the paper, we prove the uniqueness and existence theorems in the case when the given parameters and functions satisfy certain conditions. We give an example showing that this problem will have a nontrivial solution if these conditions are violated, In the paper, we also establish the stability of the solution to the considered problem with respect to the nonlocal condition.

Keywords: mixed-type equation, nonlocal problem, inverse problem, Mittag-Leffler function, Caputo operator.

1. Постановка задачи.

Известно, что теория краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка является одним из быстроразвивающихся разделов общей теории дифференциальных уравнений [1].

Многие проблемы вязкоэластичности, динамических процессов, биологических наук, теории системного контроля, электрохимии, процессы, связанные диффузией приводит к дифференциальным уравнениям дробного порядка [2-4].

Математическое моделирование многих процессов происходящих в реальном мире приводит к задачам определения коэффициентов или правой части

дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых разных областях человеческой деятельности таких, как физика (обратные задачи квантовой теории рассеяния), геофизика (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. п [5-7]. Аналогичные задачи также были рассмотрены в работах [8, 9].

Нелокальные задачи возникают при изучении различных задач математической биологии, прогнозирования влажности почвы, проблем плазмы. Более подробную информацию о нелокальных задачах можно найти в монографии [10]. А что касается нелокальных задач для уравнений смешанного типа второго порядка, то в этом направлении отметим работы [11-13]. К исследованию аналогичных задач для уравнений в частных производных с производными дробного порядков, посвящены работы [14-16].

Перечисленные выше работы в основном относятся к уравнениям смешанного типа второго порядка. Что касается уравнений смешанного типа четвёртого порядка с производными целого или дробного порядков, то нелокальные задачи для них мало изучены.

Пусть $\Omega=\{(x,t):0<x<1,-a<t<b\},\Omega_1=\Omega\cap(\mathrm{t}>0),\Omega_2=\Omega\cap(\mathrm{t}<0)$, где a,b,d – положительные действительные числа. В этой области для уравнения смешанного типа вида

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+{}_C D_{0t}^{\alpha}u+d^2u,\ t>0,\\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d^2u,\ t<0,\end{cases}\tag{1}$$

рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти пару функций ($u(x,t)$, $f(x)$) такую, что:

1) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ принадлежат классу

$$u\in C_{x,t}^{3,\alpha}(\overline{\Omega}_1)\cap C_x^4(\Omega_1)\cap C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega}_2)\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2),\ f(x)\in C[0,1],\tag{2}$$

2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ удовлетворяют уравнению (1) в области $\Omega_1\cup\Omega_2$;

3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0,-a\le t\le b,\tag{3}$$

$$u(x,-a)=\varphi(x),u_t(x,-a)={}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,b)+\psi(x),\ 0\le x\le 1;\tag{4}$$

4) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ {}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,+0)=u_t(x,-0).\tag{5}$$

Здесь $u\in C_t^{\alpha}(\Omega_1)\overset{def}{=}{}_C D_{0t}^{\alpha}u\in C(\Omega_1)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные достаточно гладкие функции, ${}_C D_{0t}^{\alpha},0<\alpha\le 1$-оператор интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется по формуле [1]:

$${}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\frac{u_\tau(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau,\ t>0.$$

2. Решение задачи А.

Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи А ищем в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и краевые условия (4), получим следующую спектральную задачу:

$$X^{IV}(x)-\lambda^4X(x)=0,\ X(0)=X(1)=X''(0)=X''(1)=0.$$

Рассматриваемая задача самосопряженная, имеет полную в $L_2(0,1)$ систему собственных функций вида

$$X_n(x)=\sqrt{2}\sin\pi nx,\ n\in N\ , \tag{6}$$

которая образует базис в $L_2(0,1)$.

2.1. Единственность решение задачи А.

Сначала докажем теорему о единственности решения задачи А.

Теорема 1. Пусть имеет место неравенство

$$\Delta_{a,b}(n)=\frac{1}{\lambda_n^2}\sin\lambda_n^2 a-\cos\lambda_n^2 a+E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right)\neq 0,\ n=1,2,\dots, \tag{7}$$

где $\lambda_n^4=d^2+\left(\pi n\right)^4$. Тогда, если решение задачи А существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u\left(x,t\right)$ решение задачи А и пусть

$$u_n(t)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi nxdx, n=1,2,3\dots. \tag{8}$$

На основании (8) введем функцию

$$v_\varepsilon(t)=\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\pi nxdx, \tag{9}$$

где $\varepsilon-$ достаточно малое число.

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^\alpha$ к обеим частям равенство (9) по t при $t\in\left(0;b\right)$ и дифференцируя равенства (9) по t два раза при $t\in\left(-a;0\right)$, а также учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{gathered}{}_C D_{0t}^\alpha v_\varepsilon(t)=\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}{}_C D_{0t}^\alpha u(x,t)\sin\pi nxdx=-d^2 v_\varepsilon(t)-\\ -\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)\sin\pi nxdx+\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f\left(x\right)\sin\pi nxdx,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}v''_\varepsilon(t)=\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt}(x,t)\sin\pi nxdx=-d^2 v_\varepsilon(t)-\\ -\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)\sin\pi nxdx+\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f\left(x\right)\sin\pi nxdx,\end{gathered} \tag{11}$$

В интегралах из правых частей равенств (10) и (11) интегрируя по частям четыре раза и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ с учетом граничных условий (3), получим

$${}_C D_{0t}^\alpha u_n(t)+\lambda_n^4 u_n(t)=f_n, t>0\,, \tag{12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u_n(t)+\lambda_n^4 u_n(t)=f_n, t<0\,, \tag{13}$$

где

$$f_n=\sqrt{2}\int_0^1 f\left(x\right)\sin\pi nxdx\,. \tag{14}$$

Отсюда находим общие решения уравнений (12) и (13), которые имеют вид

$$u_n(t)=\begin{cases} A_n E_\alpha\left(-\lambda_n^4 t^\alpha\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4}, t>0, \\ B_n \sin\lambda_n^2 t + L_n \cos\lambda_n^2 t + \dfrac{f_n}{\lambda_n^4}, t<0, \end{cases} \tag{15}$$

где $A_n, B_n, L_n, n=1,2,...$ - произвольные постоянные, $E_{\alpha,\beta}(z)$ -функция Миттаг-Леффлера, которая определяется по формуле

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ z,\alpha,\beta\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0\,.$$

Из (11), учитывая условий (4) и (5) получим, что функция $u_n(t)$ должна удовлетворять следующим условиям

$$\lim_{t\to+0}u_n(t)=\lim_{t\to-0}u_n(t), \lim_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)=\lim_{t\to-0}\frac{du_n(t)}{dt}, \tag{16}$$

$$u_n(-a)=\varphi_n, u_n'(-a)={}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(b)+\psi_n\,. \tag{17}$$

Здесь φ_n, ψ_n,- коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе (6), то есть

$$\varphi_n=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin\pi nx dx, \psi_n=\sqrt{2}\int_0^1\psi(x)\sin\pi nx dx\,.$$

Удовлетворяя (15) условиям (16) имеем

$$u_n(t)=\begin{cases} L_n E_\alpha\left(-\lambda_n^4 t^\alpha\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4},\ t>0, \\ L_n\left(\cos\lambda_n^2 t-\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 t\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4},\ t<0, \end{cases} \tag{18}$$

где L_n, $n=1,2,...$ произвольные постоянные.

Далее, удовлетворяя (18) краевым условиям (17), получим, что постоянные L_n, f_n являются решениями следующей системы

$$\begin{cases} L_n\left(\cos\lambda_n^2 a+\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4}=\varphi_n, \\ L_n\left(\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a-\lambda_n^4\cos\lambda_n^2 a\right)+L_n\lambda_n^4 E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right)=\psi_n. \end{cases} \tag{19}$$

Отсюда находим

$$L_n=\frac{\psi_n}{\lambda_n^4\Delta_n(a,b)},\quad f_n=\frac{\varphi_n\lambda_n^4\Delta_n(a,b)-\psi_n\left(\cos\lambda_n^2 a+\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a\right)}{\Delta_n(a,b)}, \tag{20}$$

при условии, что при всех $n\in N$ имеет место неравенство (7). Значить, решение $u_n(t)$ имеет вид

$$u_n(t)=\begin{cases} \dfrac{\psi_n}{\lambda_n^4\Delta_n(a,b)}\left[E_\alpha\left(-\lambda_n^4 t^\alpha\right)-\cos\lambda_n^2 a-\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a\right]+\varphi_n,\ t>0, \\ \dfrac{\psi_n}{\lambda_n^4\Delta_n(a,b)}\left(\cos\lambda_n^2 t-\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 t-\cos\lambda_n^2 a-\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a\right)+\varphi_n,\ t<0, \end{cases} \tag{21}$$

а значения $f_n, n=1,2,...$ определяются по формуле (20).

Пусть теперь $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ в $[0,1]$, и пусть условие (7) выполняется для всех $n\in N$. Тогда из соотношений (20) и (21) получим, что $u_n(t)\equiv 0$ на $[-a,b]$ и $f_n\equiv 0$ для всех $n\in N$. Это вместе с (8) и (14) означает, что

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi nx dx\equiv 0,\ \int_0^1 f(x)\sin\pi nx dx\equiv 0,\ n\in N.$$

Поскольку система $\{\sin(\pi nx)\}$ замкнута в пространстве $L_2[0,1]$, то из последних соотношений следует $u(x,t)=0$ и $f(x)=0$ почти всюду на $[0,1]$ для любого $t\in[-a,b]$. Поскольку, по условиям (2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно в $\overline{\Omega}$ и $[0,1]$ то мы имеем $u(x,t)=0$ в $\overline{\Omega}$ и $f(x)=0$ в $[0,1]$.

Предположим, что условие (7) не выполняется при $n=m$ и для некоторых a,b и d, то есть

$$\Delta_m(a,b)=\frac{1}{\lambda_m^2}\sin\lambda_m^2 a-\cos\lambda_m^2 a+E_\alpha\left(-\lambda_m^4 b^\alpha\right)=0.$$

Тогда однородная задача А, где $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ имеет ненулевое решение вида

$$u_m(x,t)=\begin{cases}\left[E_\alpha\left(-\lambda_m^4 t^\alpha\right)-\cos\lambda_m^2 a-\lambda_m^2\sin\lambda_m^2 a\right]\sin\pi mx,\ t>0,\\ \left[\cos\lambda_m^2 t-\lambda_m^2\sin\lambda_m^2 t-\cos\lambda_m^2 a-\lambda_m^2\sin\lambda_m^2 a\right]\sin\pi mx,\ t<0,\end{cases}\tag{22}$$

$$f_m(x)=-\lambda_m^4\left(\cos\lambda_m^2 t+\lambda_m^2\sin\lambda_m^2 t\right)\sin\pi mx.\tag{23}$$

Тем самым мы доказали следующий критерий единственности.

Теорема 1. Если существует решение задачи А, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия (7) при всех $n\in N$.

Теперь, выражение $\Delta_n(a,b)$ представим в виде:

$$\Delta_n(a,b)=\sqrt{1+\lambda_n^{-4}}\sin\left(\lambda_n^2 a-\rho_n\right)+E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha),\tag{24}$$

где $\rho_n=\arcsin\left(\lambda_n^2/\sqrt{1+\lambda_n^4}\right)$ и $\rho_n\to\frac{\pi}{2}$ при $n\to+\infty$. Отсюда видно, что выражение $\Delta_n(a,b)$ обращается в ноль только в том случае, когда

$$a=\frac{1}{\lambda_n^2}\left[(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\lambda_n^2 E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha)}{\sqrt{1+\lambda_n^4}}+\pi k+\rho_n\right],n=1,2,\ldots.$$

Поскольку $\Delta_n(a,b)$ является знаменателем дроби, то при достаточно больших n выражение $\Delta_n(a,b)$ может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема ”малых знаменателей”. Поэтому для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел a и b таких, что при достаточно больших n выражение $\Delta_n(a,b)$ отделено от нуля.

Лемма 2. Пусть выполнено одно из следующих условий: 1) $a=\frac{p}{\pi}$, p - натуральное; 2) $a=\frac{p}{q\pi}$, $p,q\in N,(p,q)=1$, q-нечетное, $\frac{p}{q}\notin N$. Тогда при любом фиксированном $d>0$ и при больших n существует положительная постоянная B_0 такая, что справедлива оценка

$$\left|\Delta_n(a,b)\right|\ge B_0>0.\tag{25}$$

Доказательство. Для больших значений n нетрудно видеть, что [13]

$$0<\lambda_n^2-(\pi n)^2=\left(d^2+(\pi n)^4\right)^{1/2}-(\pi n)^2=d^2\left(\left(d^2+(\pi n)^4\right)^{1/2}+(\pi n)^2\right)^{-1}<\frac{d^2}{2(\pi n)^2},\tag{26}$$

$$\left|\left(d^2+(\pi n)^4\right)^{-1/2}-(\pi n)^{-2}\right|=\left(\left(d^2+(\pi n)^4\right)^{1/2}-(\pi n)^2\right)(\pi n)^{-2}\left(d^2+(\pi n)^4\right)^{-1/2}\le\frac{d^2}{2(\pi n)^6}.\tag{27}$$

Пусть

$$\tilde{\Delta}_n(a,b)=\Delta_n(a,b)\big|_{d=0}=(\pi n)^{-2}\sin\left((\pi n)^2 a\right)-\cos\left((\pi n)^2 a\right)+E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right). \qquad (28)$$

Рассмотрим разность

$$\Delta_n(a,b)-\tilde{\Delta}_n(a,b)=\lambda_n^{-2}\sin\left(\lambda_n^2 a\right)-(\pi n)^{-2}\sin\left((\pi n)^2 a\right)-\cos\left(\lambda_n^2 a\right)+\cos\left((\pi n)^2 a\right)+$$
$$+E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right)-E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)$$

и используя соотношения (26) и (27) оценим её.

$$\left|\Delta_n(a,b)-\tilde{\Delta}_n(a,b)\right|\le(\pi n)^{-2}\left|\sin\left(\lambda_n^2 a\right)-\sin\left((\pi n)^2 a\right)\right|+\left|\cos\left(\lambda_n^2 a\right)-\cos\left((\pi n)^2 a\right)\right|+$$
$$+\left|\left(\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{(\pi n)^2}\right)\sin\left(\lambda_n^2 a\right)\right|+\left|E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right)-E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)\right|\le(\pi n)^{-2}\left|\lambda_n^2 a-(\pi n)^2 a\right|+$$
$$+\left|\lambda_n^2 a-(\pi n)^2 a\right|+\left|\frac{1}{\lambda_n^2}-\frac{1}{(\pi n)^2}\right|+O\left(E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)-E_\alpha\left(-\lambda_n^4 b^\alpha\right)\right)\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{(\pi n)^2}\right)\frac{ad^2}{2(\pi n)^2}+\frac{d^2}{2(\pi n)^6}+\frac{2M}{1+\left|(\pi n)^4 b^\alpha\right|}\le\frac{C_0}{n^4}, \qquad (29)$$

где C_0-константа, зависящей от a и d.

В силу оценки (29) достаточно оценить $\tilde{\Delta}_n(a,b)$. Пусть a- иррациональное число, представимое в виде $\frac{p}{\pi}$, $p\in N$. Тогда из (28) при всех n и $d>0$ имеем

$$\left|\tilde{\Delta}_n(a,b)\right|\ge\left|(-1)^{p+1}-E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)\right|\ge 1-E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)=C_1>0.$$

Пусть теперь $a=\frac{p}{q\pi}$, $p,q\in N,(q,p)=1$, $q-$нечетное. Разделим $n^2 p$ на q остатком: $n^2 p=sq+r$, где $s,r,\in N\cup\{0\},0\le r<q$. Тогда выражение (24) примет вид

$$\tilde{\Delta}_n(a,b)=\sqrt{1+(\pi n)^{-4}}\,(-1)^{s+1}\cos\left(\frac{\pi r}{q}+\varepsilon_n\right)+E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right), \qquad (30)$$

где $\varepsilon_n=\arcsin\left(1/\sqrt{1+(\pi n)^4}\right)>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to+\infty$.

При $r=0$ мы имеем случай, рассмотренный выше, поэтому расмотрим случай $r>0$. Тогда $1\le r\le q-1$, $q\ge 2$ и при больших n

$$0<\frac{\pi}{q}+\varepsilon_n\le\frac{\pi r}{q}+\varepsilon_n\le\pi-\frac{\pi}{q}+\varepsilon_n<\pi,$$

и отсюда следует, что если $q=2l$, $l\in N$, то $\frac{\pi r}{q}+\varepsilon_n\to\frac{\pi}{2}$, при $r=l$, когда $n\to+\infty$; если $q=2l+1$, то при любом $1\le r\le q-1$ имеем $\frac{\pi r}{q}\ne\frac{\pi}{2}$. Поскольку $\varepsilon_n\to 0$ и $E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)\to 0$ при $n\to+\infty$, то сущетвует постоянная $n_1>0$ такая, что при всех

$$\left|\cos\left(\frac{\pi r}{q}+\varepsilon_n\right)\right|\ge\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right|>0,\ \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right|-E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right)\ge B_2=const>0,$$

где $0<B_2<\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right|$.

Учитывая это из (30) при $n > n_1$ получим

$$\left|\Delta_n(a,b)\right| \geq \cos\left(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_n\right) - E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right) \geq \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi r}{q}\right| - E_\alpha\left(-(\pi n)^4 b^\alpha\right) \geq C_2 . \qquad (31)$$

Из (30) следует справедливость (25) при больших n.

2.2. Существование решение задачи А.

Теперь при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и число a покажем, что функции

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin \pi n x , \qquad (32)$$

$$f(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \pi n x , \qquad (33)$$

где $u_n(t)$ и f_n определяются формулой (20) и (21), удовлетворяют условиям 1) и 2).

Имеет место

Лемма 3. Пусть выполнены условия (25). Тогда

1) при $t \in [0,b]$ имеет место

$$\left|u_n(t)\right| \leq \frac{B_3}{n^2}|\psi_n| + \left|\varphi_n\right|, \ \left|{}_C D_{0t}^\alpha u_n(t)\right| \leq B_4\left|\psi_n\right|,$$

при $t \in [-a,0]$ имеет место

$$\left|u_n(t)\right| \leq B_5\left(\left|\varphi_n\right| + \frac{1}{n^2}\left|\psi_n\right|\right), \left|\frac{du_n(t)}{dt}\right| \leq B_6\left|\psi_n\right|, \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| \leq B_7 n^2 |\varphi_n| ,$$

2) при $t \in [-a,b]$ имеет место

$$\left|f_n\right| \leq B_8\left(n^2|\psi_n| + n^4\left|\varphi_n\right|\right),$$

где $B_k, k = \overline{1,8}$ - здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство леммы легко следует из соотношений (20), (21) и из оценки (25).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде (32) и (33), где $u_n(t)$ и f_n определяются по формулам (20) и (21). Теперь, остаётся доказать правомерность всех этих действий. Для этого, формально из (33), почленным дифференцированием составим ряды

$${}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_C D_{0t}^\alpha u_n(t) X_n(x), t > 0 , \qquad (34)$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\frac{d^k X_n(x)}{dx^k}, \ k = \overline{1,4}, t > 0 , \qquad (35)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} X_n(x), t < 0 , \qquad (36)$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\frac{d^k X_n(x)}{dx^k}, \ k = \overline{1,4}, t < 0 . \qquad (37)$$

Учитывая леммы 2,3 нетрудно видеть, что ряды (32)-(37) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\psi_n| ,$$

и поэтому исследуем сходимость этого ряда. Учитывая соотношение

$$\varphi_n = \frac{1}{(\pi n)^5}\varphi_n^{(5)}, \varphi_n^{(5)} = \frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^5}\int_0^1 \varphi^{(5)}(x)\cos \pi n x dx ,$$

$$\psi_n = -\frac{1}{(\pi n)^3}\psi_n^{(3)} = -\frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^3}\int_0^1 \psi'''(x)\cos\pi nx dx,$$

а также применяя неравенство Коши-Шварца и Бесселя имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(5)}| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(5)}|^2\right)^{1/2} \le C\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\psi_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\psi_n^{(3)}| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n^{(3)}|^2\right)^{1/2} \le C\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)},$$

где $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Тогда по теореме Вейерштрасса ряды (32)-(37) сходятся соответственно в областях $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ абсолютно и равномерно.

Отсюда и следует, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (33), принадлежит классу (2), а также удовлетворяет условиям (3)-(5).

Пусть теперь $\Delta_n(a,b)=0$ при некоторых a и $n=k_1,...,k_s$, $1\le k_1<k_1<...<k_s, s\in N$. Тогда для разрешимости системы (19) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi nx dx = 0, \int_0^1 \psi(x)\sin\pi nx dx = 0, n=k_1,...k_s. \tag{38}$$

В этом случае решение задачи определяется в виде суммы рядов

$$u(x,t) = \sqrt{2}\left[\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + ... + \sum_{n=k_s+1}^{\infty} +\right] u_n(t)\sin\lambda_n x + \sum_m Q_m V_m(t), \tag{39}$$

$$f_n(x) = \sqrt{2}\left[\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + ... + \sum_{n=k_s+1}^{\infty} +\right] f_n \sin\lambda_n x + \sum_m P_m W_m(t), \tag{40}$$

где в последней сумме $m=k_1,...k_s$, Q_m, P_m - произвольные постоянные, функции $V_m(t)$ и $W_m(t)$ определяются по формулам (22) и (23).

Таким образом имеет место:

Теорема 2. Пусть

$$\varphi(x)\in C^4[0,1], \psi(x)\in C^2[0,1], \varphi^{(5)}(x), \psi^{(3)}(x)\in L_2(0,1),$$

$$\varphi^{(2n)}(0)=\varphi^{(2n)}(1)=\psi^{(2\ell)}(0)=\psi^{(2\ell)}(1)=0, n=\overline{0,2}, \ell=\overline{0,1}.$$

Тогда задача А в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (7) и (25) и решение определяется по формулам (32) и (33). При этом если $\Delta_n(a,b)=0$ при некоторых a,b и $n=k_1,...,k_s$ и выполнено условие (25), то задача А разрешимо только тогда, когда выполняются условия ортогональности (38). При этом решение определяется по формулам (39) и (40).

2.3. Устойчивость решение задачи А.

Введем нормы

$$\|u(x,t)\|_{L(0,1)} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}}|u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, n\in N_0.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение задачи А удовлетворяет оценкам

$$\| u(x,t) \|_{L_2} \le B_9 \left(\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2} \right), \tag{41}$$

$$\| f(x) \|_{L_2} \le B_{10} \left(\|\psi\|_{W_2^2} + \|\varphi\|_{W_2^4} \right), \tag{42}$$

$$\| u(x,t) \|_{C(\overline{\Omega})} \le B_{11} \left(\|\psi\|_{W_2^0} + \|\varphi\|_{W_2^2} \right), \tag{43}$$

$$\| f(x) \|_{C[0,1]} \le B_{12} \left(\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^5} \right), \tag{44}$$

где B_i - положительная постоянная.

Доказательство. Поскольку система $\left\{\sqrt{2}\sin(\pi nx)\right\}\Big|_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2[0,1]$, из (33), (21) и леммы 3 следует, что

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \le 2B_3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{|\psi_n|}{n^2} \right)^2 + |\varphi_n|^2 \right] \le 2B_3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\psi_n|^2 + |\varphi_n|^2 \right] \le B_9^2 \left(\|\psi(x)\|_{L_2}^2 + \|\varphi(x)\|_{L_2}^2 \right),$$

для $t \in [-a,b]$. Отсюда следует оценка (41).

Поскольку

$$\varphi_n = \frac{1}{(\pi n)^4} \varphi_n^{(4)}, \varphi_n^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(4)}(x) \sin \pi nx dx,$$

$$\psi_n = \frac{1}{(\pi n)^2} \psi_n^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^2} \int_0^1 \psi''(x) \sin \pi nx dx,$$

из (32) и леммы 3 следует, что

$$\|f(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \le 2B_8^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n^2 \psi_n \right)^2 + \left(n^4 \varphi_n \right)^2 \right] \le 2B_8^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\psi_n^{(2)}|^2 + \left|\varphi_n^{(4)}\right|^2 \right] \le$$

$$\le 2B_8^2 \left(\|\psi''\|_{L_2}^2 + \left\|\varphi^{(\mathrm{IV})}\right\|_{L_2}^2 \right) \le B_{10}^2 \left(\|\psi\|_{W_2^2}^2 + \|\varphi\|_{W_2^4}^2 \right).$$

Из последнего неравенства следует оценка (42).

Пусть (x,t) произвольная точка в $\overline{\Omega}$. Используя формулы (33) и (21) и представление $\varphi_n = \frac{1}{(\pi n)^2} \varphi_n^{(2)}$, где $\varphi_n^{(2)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(2)}(x) \sin \pi nx dx$ и учитывая лемму 3 и неравенство Коши-Шварца, получаем

$$|u(x,t)| \le \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \le \sqrt{2} B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} |\psi_n| + |\varphi_n| \right] \le \frac{\sqrt{2} B_1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(|\psi_n| + \left|\varphi_n^{(2)}\right| \right) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2} B_1}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n^{(2)}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \le \frac{\sqrt{2} B_1}{\pi^2} S \left(\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi''\|_{L_2} \right) \le B_8^2 \left(\|\psi\|_{W_2^0}^2 + \|\varphi\|_{W_2^2}^2 \right),$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = S$, отсюда и получаем оценку (43).

Покажем оценку (54). Принимая во внимание представления $\psi_n = -\frac{\psi_n^{(3)}}{(\pi n)^3}$ и $\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(5)}}{(\pi n)^5}$, используя формулу (32) и лемму 3, получаем

$$|f(x)| \le \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \le \sqrt{2} B_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\psi_n| + n^4 |\varphi_n| \le \frac{\sqrt{2} B_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left|\psi_n^{(3)}\right| + \left|\varphi_n^{(5)}\right| \right) \le$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}B_1}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_n^{(3)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{(5)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leq \frac{B_1}{\sqrt{3}}\left(\left\|\psi'''\right\|_{L_2}+\left\|\varphi^{(5)}\right\|_{L_2}\right)\leq B_8^2\left(\left\|\psi\right\|_{W_2^3}^2+\left\|\varphi\right\|_{W_2^5}^2\right),$$

Из последнего неравенства следует оценка (44). Доказательство теоремы 3 завершено.

Литература

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo; Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, xvi+523 pp. (2006).

2. Handbook of Fractional Calculus with Applications; Tenreiro Machado, J. A., Ed.; Walter de Gruyter GmbH: Berlin, Germany, Volumes 4-8.(2019).

3. Kumar, D.; Baleanu, D. Fractional Calculus and Its Applications in Physics. Front. Phys. 2019, 7, doi:10.3389/fphy.2019.00081

4. R. L. Magin; Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Inc., Redding, CT, (2006).

5. S.I. Kabanikhin, A. Lorenzi; Identification Problems of Wave Phenomena, VSP, The Netherlands, (1999).

6. Romanov, V. G. Invtstigation Methods for Inverse Problems / V.G.Romanov. - Utrecht:VSP, (2002).

7. Isakov, V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V.Isakov. - Springer Science. - 343p. (2006).

8. Кожанов, А. И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени / А. И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и матем. физики, 2005. - Т.45. - №12. - С.2168-2184.

9. Kozhanov, A. I. On solvability of an inverse problems for parabolic equation with coeffcient and right-hand side / A. I. Kozhanov // II .J. Inverse Ill-Posed Probl. - V. 11. - № 5. - P. 505-522, (2003).

10. Нахушев, А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных.-М.: Наука, - 287 с. (2006).

11. K. B. Sabitov. Nonlocal Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation in a Rectangular Domain. Mathematical Notes, Vol. 89, No. 4, pp. 562–567, (2011).

12. K. B. Sabitov and G. R. Yunusova. Inverse Problem for an Equation of Parabolic-Hyperbolic Type with a Nonlocal Boundary Condition. Differential Equations, Vol. 48, No. 2, pp. 246–254, (2012).

13. К.Б.Сабитов, С.Н.Сидоров. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием. Известия вузов. Математика. №1, с. 46–59, (2015).

14. Abdullaev O. Kh., Sadarangani K. Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative. Electronic Journal of differential Equations, (164), 1-10, (2016).

15. Agarwal P., Berdyshev. Karimov. Solvability of a non-local problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative. Results in Mathematics, -v.71. - 3. - P.1235-1257, (2017).

16. Berdyshev A. S., Kadirkulov J. B, Eshmatov B. E. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2016 , No. 36, pp. 1–11, (2016).